Teorema de Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1738)

- Princípio da Conservação das Massas aplicado ao escoamento dos fluidos

Energia = capacidade de realizar trabalho

Energia = Força x Deslocamento

$$E = F \cdot L$$

3.6.1. Tipos de energia presentes no escoamento de fluidos

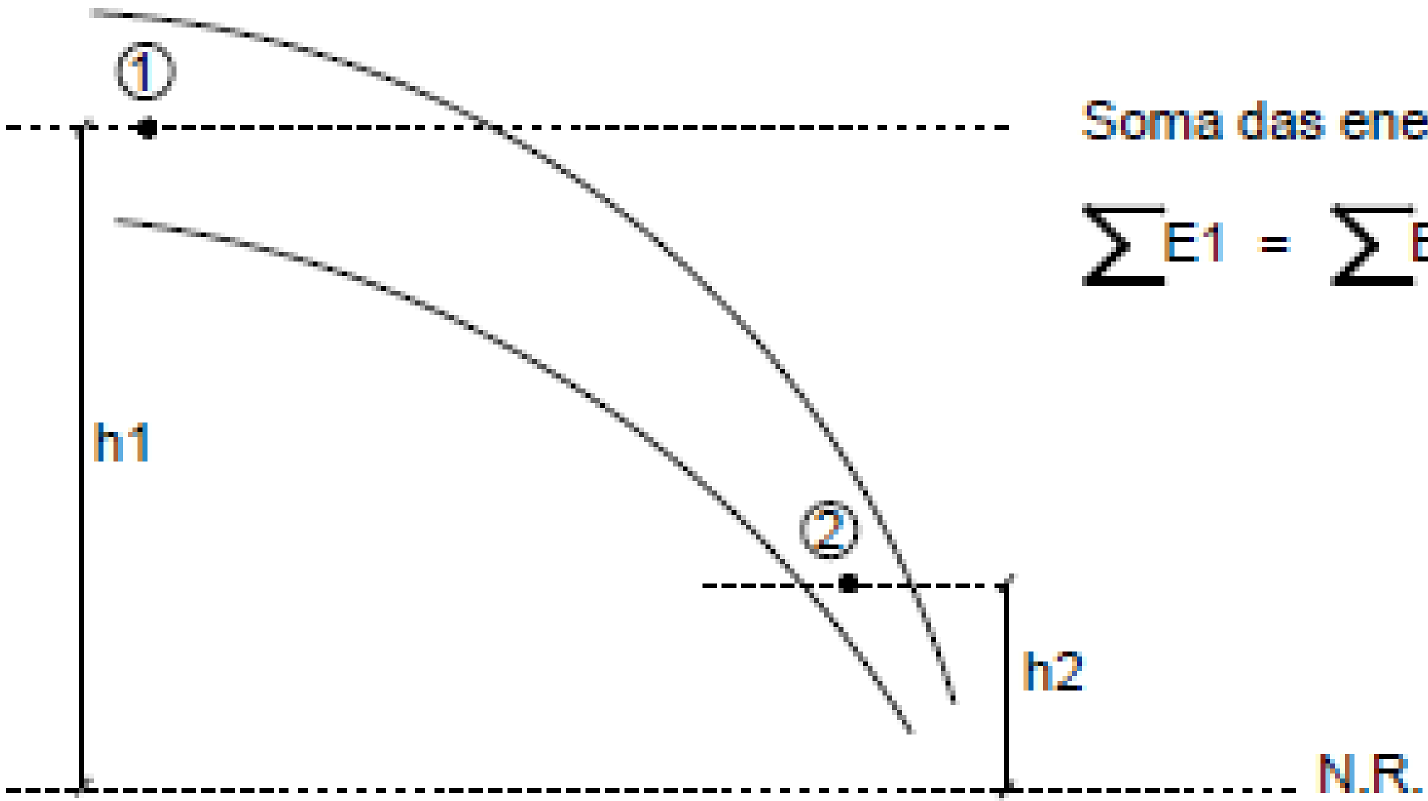
a) Energia cinética (E_c): $$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

b) Energia potencial (E_{pot}): $$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

c) Energia de pressão (E_p): $$E_p = P \cdot Vol$$

3.6.2. Escoamento de um fluido perfeito

Fluido perfeito $\rightarrow$ Escoamento sem perda de energia



Soma das energias:

$$\sum E1 = \sum E2$$

Simplificação do Teorema de Bernoulli:

$$\sum E = E_P + E_c + E_{pot}$$

$$\sum E_1 = \sum E_2$$

$$E_{P1} + E_{c1} + E_{pot1} = E_{P2} + E_{c2} + E_{pot2}$$

$$P_1 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m\,g\,h_1 = P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m\,g\,h_2$$

$$P_1 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m\,g\,h_1 = P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m\,g\,h_2$$

Massa específica: $\rho = \frac{m}{Vol} \quad \Rightarrow \quad Vol = \frac{m}{\rho}$

Substituindo Vol por $\frac{m}{\rho}$:

$$P_1 \cdot \frac{m}{\rho} + \frac{m \cdot V_1^2}{2} + m\,g\,h_1 = P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot V_2^2}{2} + m\,g\,h_2$$

Dividindo todos os termos por $m \cdot g$:

$$\frac{P_1 \cdot \frac{m}{\rho} + \frac{m \cdot V_1^2}{2} + m\,g\,h_1}{m \cdot g} = \frac{P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot V_2^2}{2} + m\,g\,h_2}{m \cdot g}$$

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2$$

Peso específico: $\gamma = \rho \cdot g$

Substituindo $\rho \cdot g$ por γ:

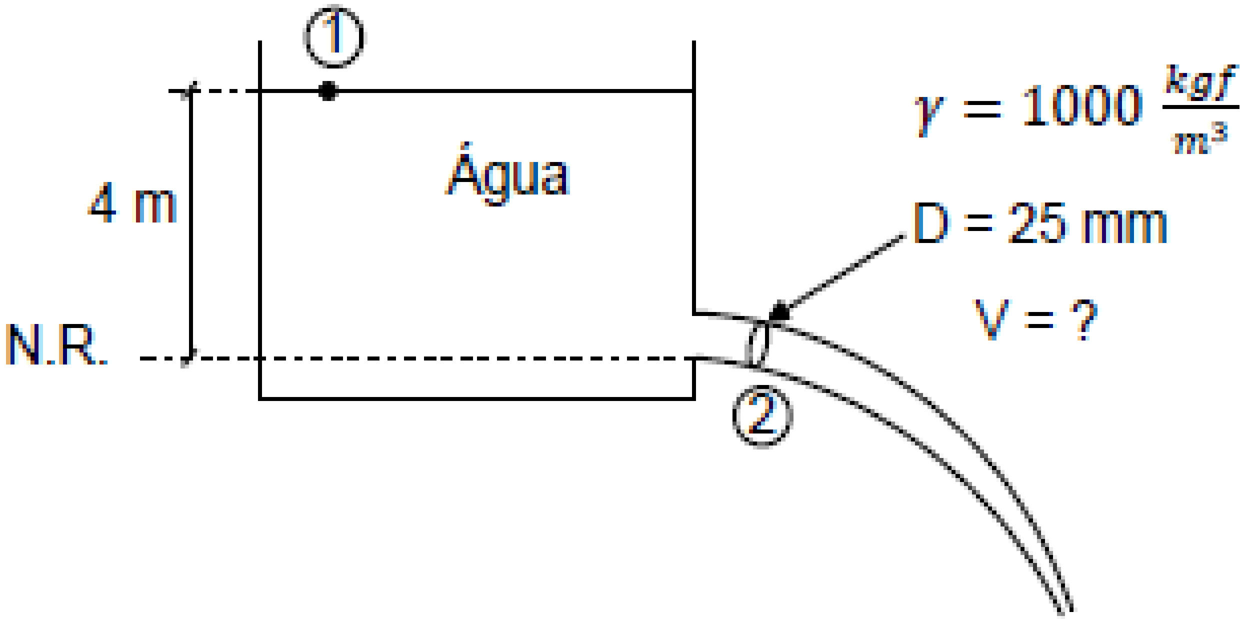
Teorema de Bernoulli aplicado ao fluido Perfeito

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2}$$

3.6.3 Aplicações do Teorema de Bernoulli

Exercícios

a) O esquema a seguir representa o escoamento de um fluido perfeito.



Pede-se:

a.1) A velocidade do jato d'água;

a.2) A vazão do escoamento.

Solução:

a.1) Cálculo da velocidade – Teorema de Bernoulli

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2$$

→ $\frac{P}{\gamma}$ é pressão relativa e o N.R. passa pelo ponto 2.

→ Nos pontos 1 e 2 a água está exposta à pressão atmosférica.

Portanto, pode-se simplificar para:

$$0 + 0 + h_1 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$$

$$0 + 0 + 4 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$$

$$V_2 = \sqrt{4 \cdot 2g} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 9{,}81}$$

$V_2 = 8{,}86\ m/s$ (Resultado válido para o fluido perfeito)

Na prática: $V = 0{,}98\ V_t$ (V_t = velocidade teórica)

$Q = 0{,}95\ Q_t$ (Q_t = vazão teórica) a.2) Cálculo da vazão – Equação da Continuidade

$$Q = V \cdot A \qquad\qquad A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}025^2}{4} \Rightarrow A = 0{,}000490873 \text{ m}^2$$

$$Qt = 8{,}86 \text{ x } 0{,}000490873 = 0{,}00435 \text{ m}^3/\text{s}$$

1. Teorema de Bernoulli – Aplicações

Resumo:

a) Canalizações:

$E_1 = E_2 + hf_{1\text{-}2}$ $\qquad$ $E = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h$

b) Bombas:

H_B = Altura manométrica, ou Hm

$E_1 + Hm = E_2 + hf_{1\text{-}2}$

Potência útil: $\qquad Pot_B = \gamma \cdot Q \cdot Hm$

a) <u>SI</u>:

$\gamma = 9810$ N . m^{-3} $\qquad$ $Pot_{abs(B)}$ em N . m . s^{-1} (W)

Potência absorvida:

$$Pot_{abs\ B} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{\eta_B}$$

η_B = rendimento da bomba

Potência do motor:

$$Pot_{MB} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{\eta_B \cdot \eta_M}$$

η_M = rendimento do motor

$$Pot_{MB} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{\eta_{MB}}$$

η_{MB} = rendimento do conjunto motobomba

$$\eta_{MB} = \eta_B \cdot \eta_M$$

b) Sistema MK*S - Cálculo prático:

$\gamma = 1000 \text{ kgf} \cdot m^{-3}$

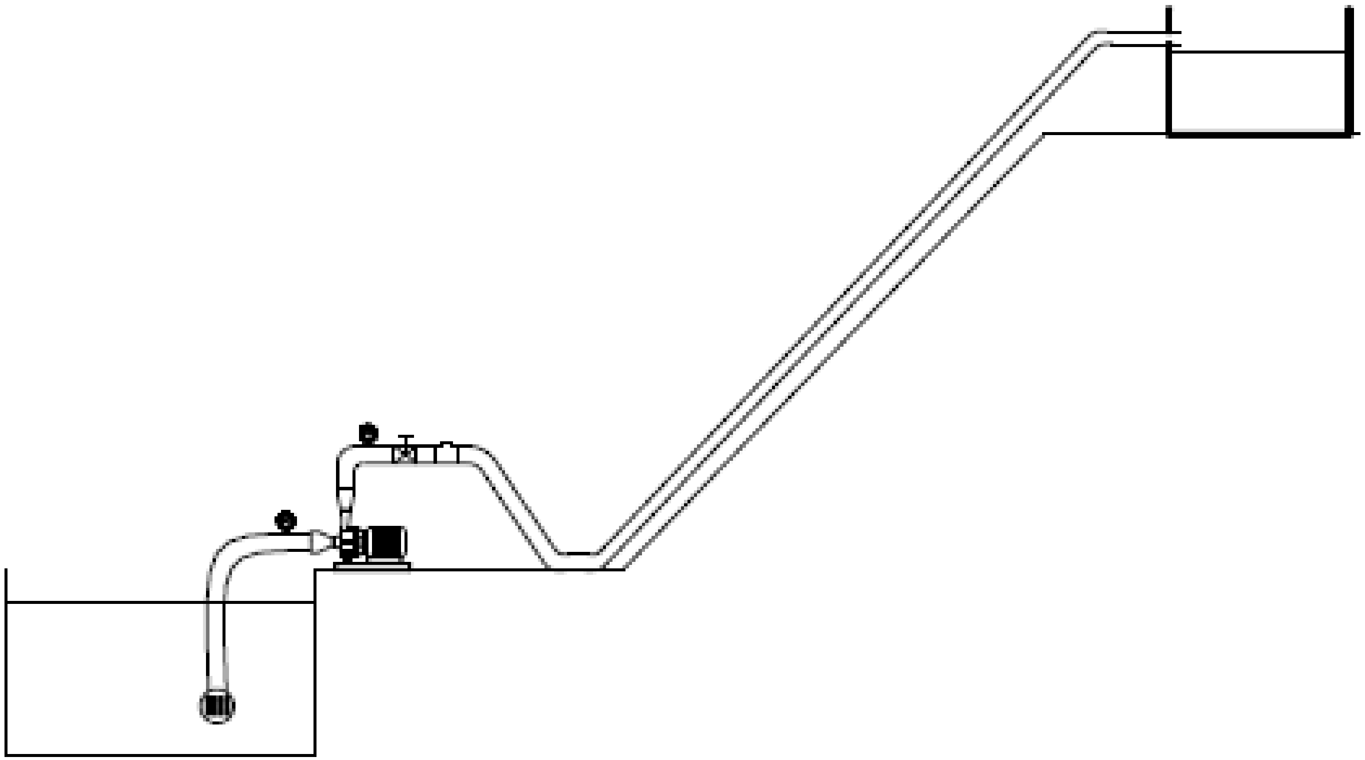
$$Pot_{abs\ B} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75 \cdot \eta_B}$$

$$Pot_{MB} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75 \cdot \eta_B \cdot \eta_M}$$

$$Pot_{MB} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75 \cdot \eta_{MB}}$$

1.1. Exemplos – Potência de bombas e custo de energia

a) Uma bomba succiona e recalca água segundo o esquema da figura abaixo:



Calcular a potência absorvida pela bomba (B), recalcando 1000 L/min, se o vacuômetro (V) na sucção mostra um vácuo (pressão < Patm) de 300 mm Hg e o manômetro no recalque mostra uma pressão de 2,8 $kgf.cm^{-2}$. Considere o rendimento da bomba de 60%.

Solução:

Dados:

$Q = 1000 \text{ L/min} = 1000/(1000 \times 60) = 0{,}0167 \text{ m}^3/\text{s}$

$P_1 = -\ 300 \text{ mm Hg} = -\ 0{,}3 \text{ m Hg} \times 13600 \text{ kgf.m}^{-3} = -\ 4{,}08 \text{ mca}$

$P_2 = 2{,}8 \text{ kgf.cm}^{-2} = 2{,}8 \text{ kgf.cm}^{-2} \times 10 \text{ mca/kgf.cm}^{-2} = 28 \text{ mca}$

$$V_1 = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{4 \times 0{,}0167}{\pi \times 0{,}15^2} = 0{,}95\ m/s$$

$$V_2 = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{4 \times 0{,}0167}{\pi \times 0{,}1^2} = 2{,}13\ m/s$$

$h_1 = 0;\ h_2 = 0$

$\gamma = 1000 \text{ kgf.m}^{-3}$

Distância 1-2 é muito pequena $\Rightarrow hf_{1\text{-}2} \approx 0$

Cálculos:

Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+h_1+H_m=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+h_2+hf_{1-2}$$

$$-4{,}08+\frac{0{,}95^2}{19{,}62}+0+H_B=28+\frac{2{,}12^2}{19{,}62}+0+0$$

$H_m = 32{,}3$ mca

$$Pot_{abs}=\frac{\gamma\ Q\ H_m}{75\ \eta_B}=\frac{1000\times 0{,}0167\times 32{,}3}{75\times 0{,}6}=11{,}99\ cv$$

b) Calcular o custo do consumo de energia elétrica de um pivô central, com os seguintes dados:

<u>Dados</u>: <u>Esquema</u>:

Área irrigada: 80 ha ($800.000\ m^2$)

Lâmina d'água anual: 600 mm (0,6 m)

Custo da energia (kWh): R$ 0,18

Perdas de carga: 1 mca (sucção)

10 mca (recalque)

Pressão: $P_1 = 0$ $P_2 = 3,5\ kgf/cm^2$

Velocidade: $V_1 = 0$ $V_2 = 2\ m/s$

Rend. do conj. motobomba: $\eta_{MB} = 60\%$

Tarifa de energia convencional (consumo)

Solução:

a) Potência absorvida (motor, ou conj. motobomba)

potência = energia/tempo $\Rightarrow$ Energia = potência/tempo

cvh = cv x hora

1 cvh = 75 kgf . m/s x 1 h

1 kgf = 9,81 N $\Rightarrow$ 1 cvh = 75 x 9,81 = 735, 75 N.m/s (watt) x 1 h

1 cvh = 0,73575 kWh

b) Consumo e custo da energia

Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 + H_m = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + hf_{1-2}$$

$$0 + 0 + 0 + H_m = 35 + \frac{2^2}{19{,}62} + 25 + (1 + 10)$$

Hm = 71,2 mca

Potência absorvida pelo conjunto motobomba:

$$\text{Pot}_{\text{abs B}} = \frac{\text{Energia}}{\text{tempo}} = \frac{1000 \cdot Q \cdot \text{Hm}}{75 \cdot \eta_B}$$

$$\text{Pot}_{\text{abs B}} = \frac{\text{Energia}}{\text{tempo}} = \frac{1000 \cdot \frac{\text{volume}}{\text{tempo}} \cdot \text{Hm}}{75 \cdot \eta_B} \quad \frac{\text{Energia}}{\text{tempo}} = \frac{1000 \cdot \text{volume} \cdot \text{Hm}}{\text{tempo} \cdot 75 \cdot \eta_B \cdot 3600\ (\text{s/h})}$$

$$\text{Energia} = \frac{1000 \cdot \text{volume} \cdot \text{Hm}}{75 \cdot \eta_B} = \frac{1000 \cdot (800000\ \text{m}^2 \cdot 0{,}6\ \text{m}) \cdot 71{,}2}{75 \cdot 0{,}6 \cdot 3600}$$

Energia abs. = 210962,96 cvh

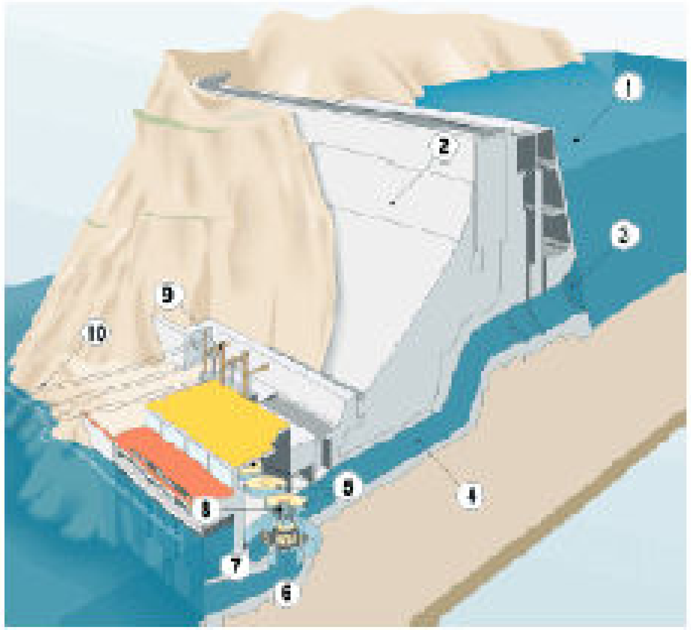
ou 210962,96 cvh x 0,73575 (kWh/cvh) = 155216 kWh

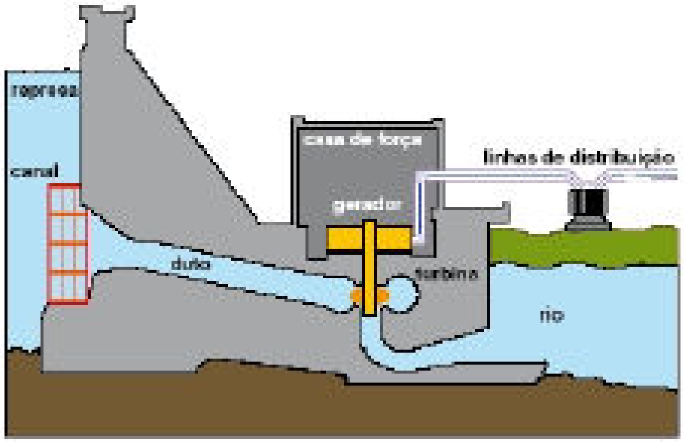
Custo da energia = 155216 kWh x R$/kWh 0,18 = R$ 27.938,88

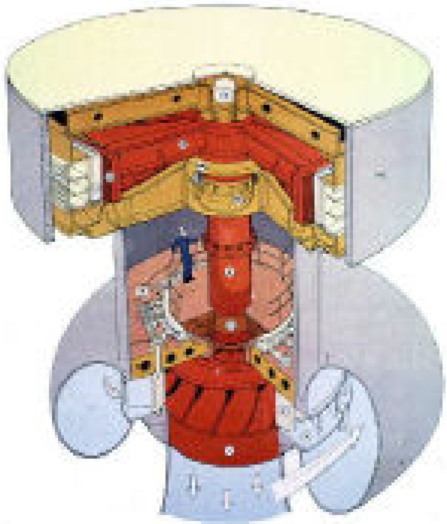
2. Turbinas

- Turbinas transformam energia de velocidade em trabalho (Ex.: energia elétrica)

2.1. Turbina hidrelétrica

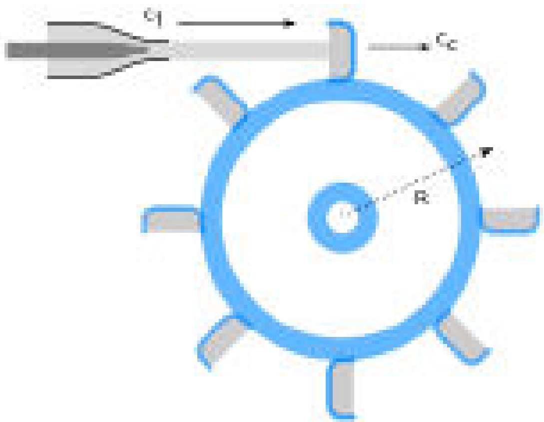


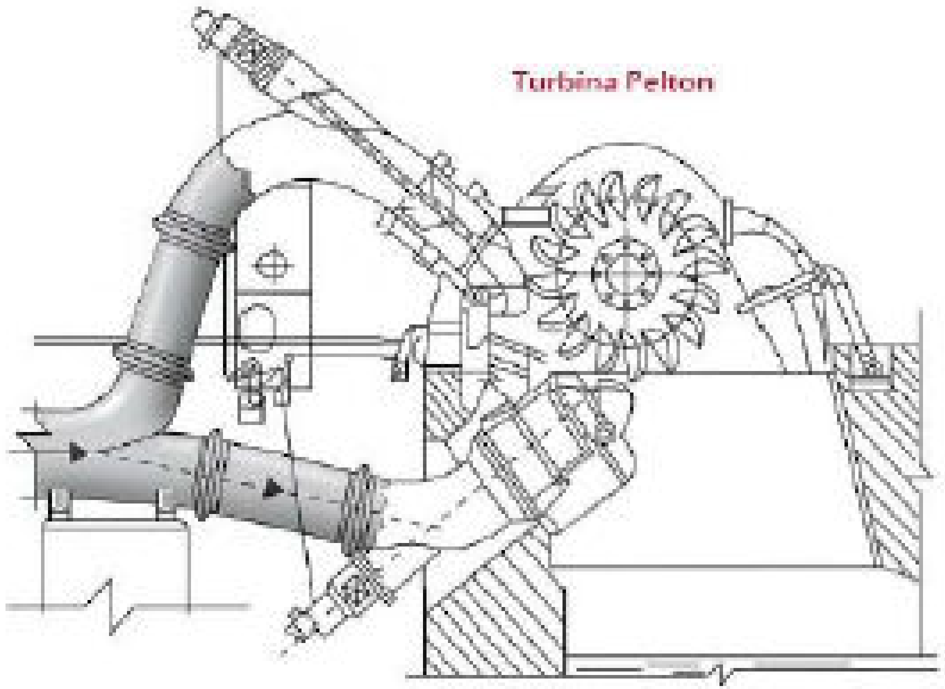




2.2. Turbina Pelton:

- Um ou mais bocais de acionamento
- Câmara fechada ou semifechada para aumentar a eficiência
- Quedas d'água maiores: 350 a 1100 m
- Rotor na posição vertical
- Ex.:





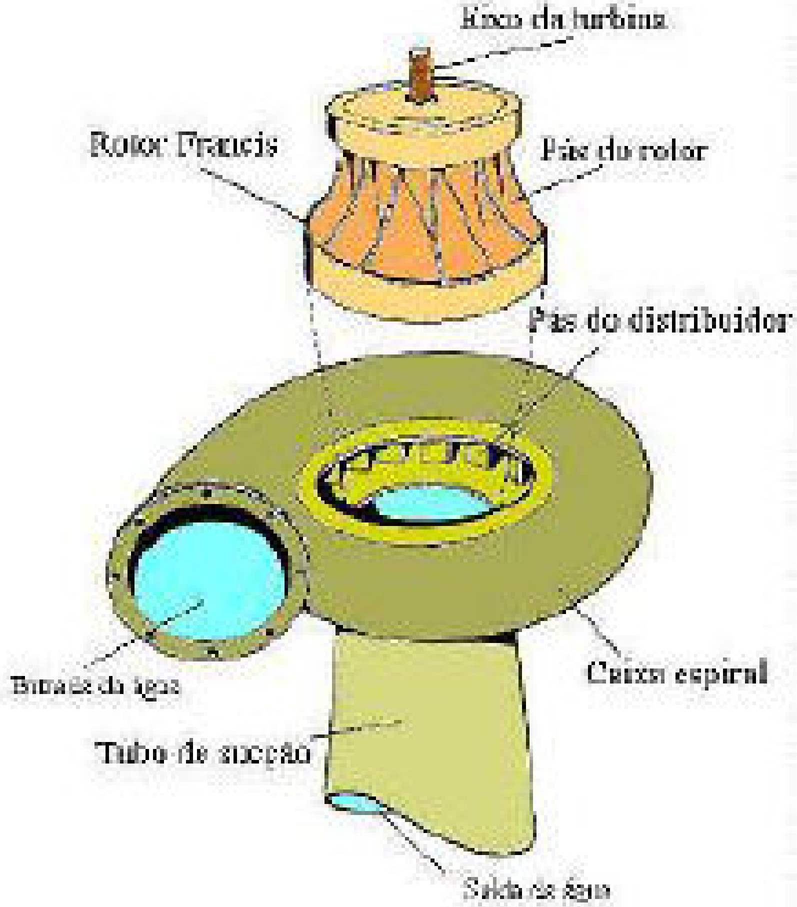
2.3. Turbina Francis

- Câmara fechada aumenta a eficiência

- Rotor na posição horizontal

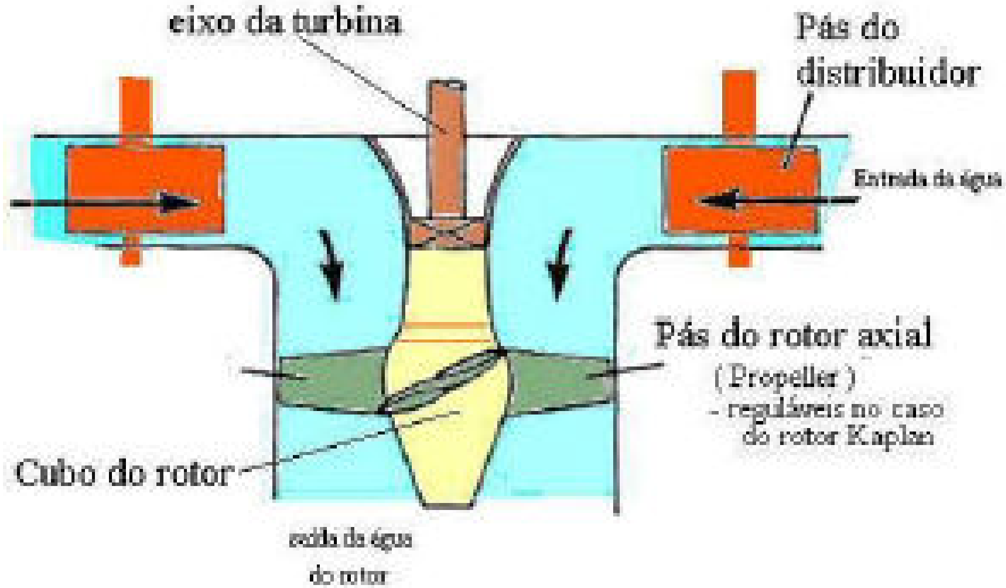
- Quedas d'água de 40 a 400 m

- Ex.: Itaipu, Tucuruí e Furnas



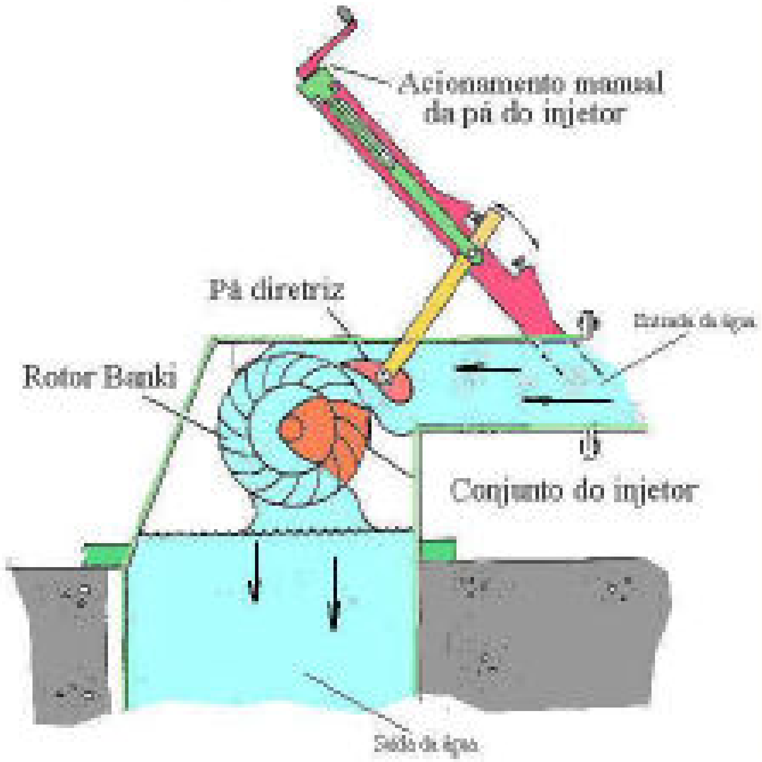
2.4. Turbina Kaplan

- Rotor na posição horizontal
- Fluxo axial de água (sentido do eixo)
- Quedas d'água de 60 m
- Ex.: Três Marias e Yacireta (Paraguai)



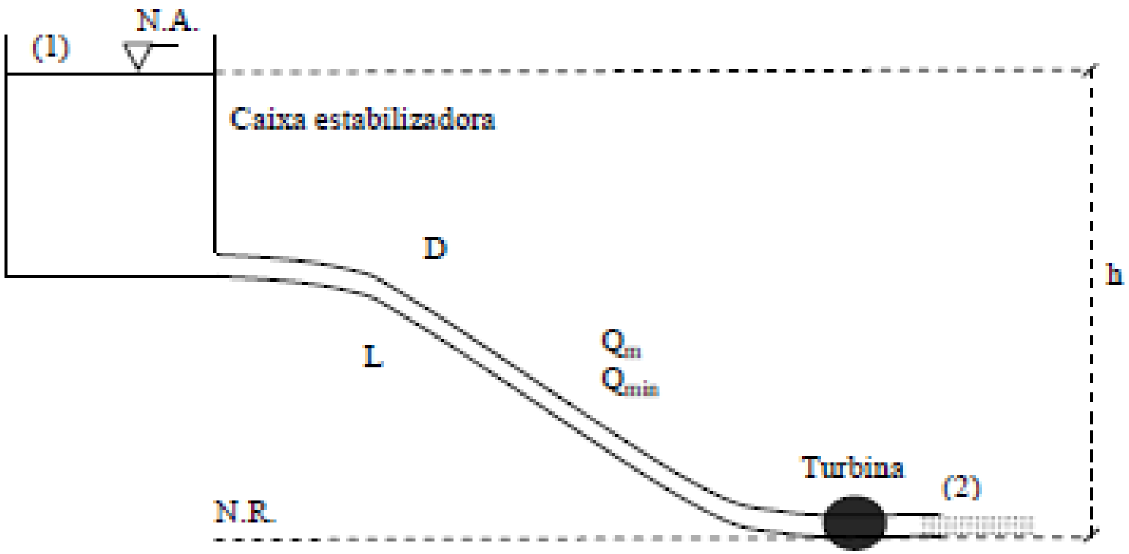
2.5. Turbina de fluxo cruzado

- Aplicações: Geração de energia e bombeamento de água (turbobomba)



3. Teorema de Bernoulli aplicado a turbinas

Esquema de turbina



- Funcionamento oposto ao da bomba (Bomba consome e Turbina gera energia)

$E_1 = E_2 + E_T + hf_{1\text{-}2}$

E_T = energia absorvida pela turbina (energia/peso)

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + E_T + hf_{1-2}$$

$hf_{1\text{-}2}$ = perda de carga que ocorre entre os pontos 1 e 2

Potência e rendimentos:

$$Pot_{abs\ T-água} = \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75}$$

Rend. turbina $\eta_T = \frac{Pot_{abs\,G}}{Pot_{abs\,T}}$

Rend. gerador $\eta_G = \frac{Pot_{abs\,Rede}}{Pot_{abs\,G}}$

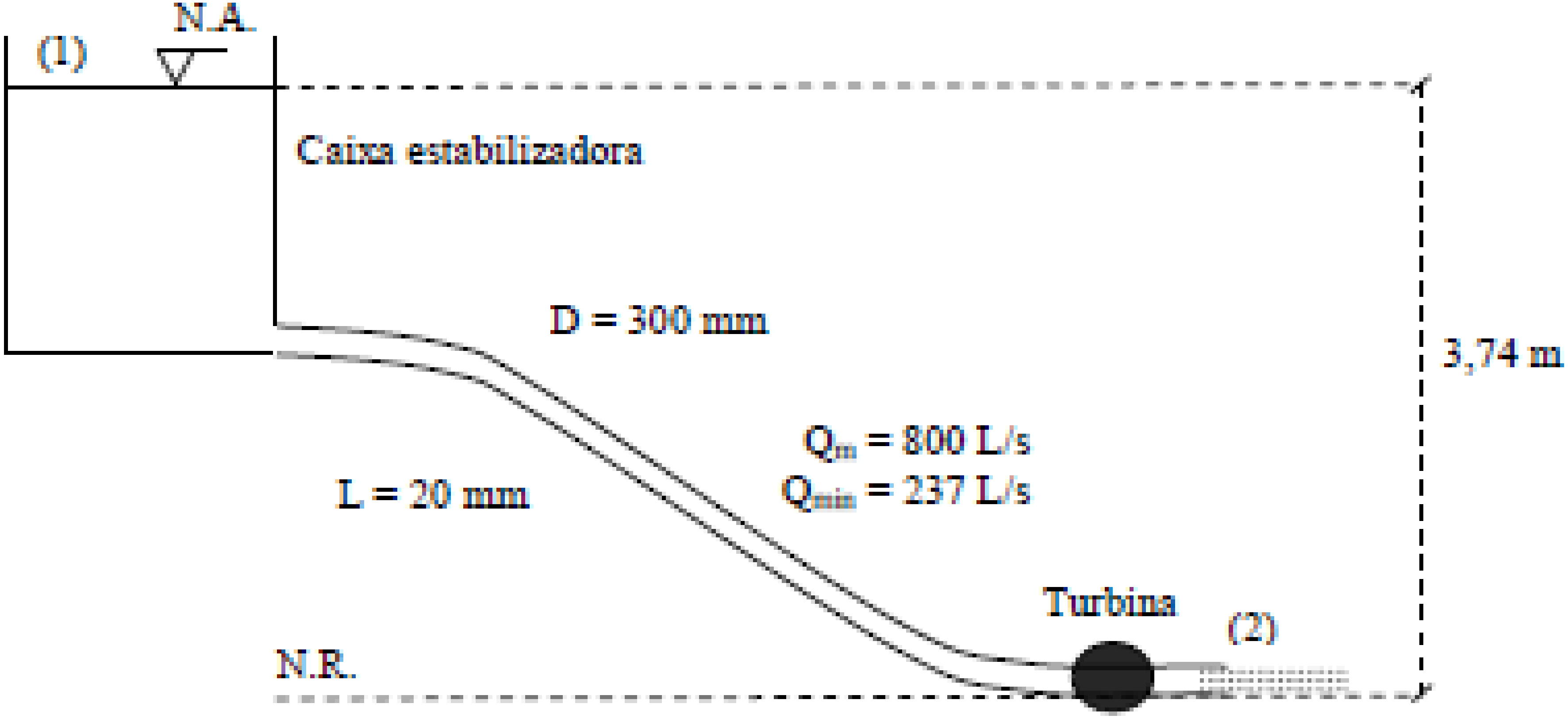
Rend. turbina+gerador $\eta_{(T+G)} = \eta_T \times \eta_G$

Pot. absorvida rede $Pot_{abs\ Rede} = \eta_G \times Pot_{abs\ G}$

Pot. abs. turbina $Pot_{abs\ T} = \eta_{(T+G)} \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75}$

3.1. Exemplos:

a) Uma turbina está gerando energia segundo o esquema abaixo:



N.R. = Nível de referência (ponto 2)

Dados:

<u>Ponto 1</u>

$P_1 = 0$

$V_1 = 0$

$h_1 = 3{,}5$ m

$hf_{1\text{-}2} = 0{,}12$ mca

$Q_m = 800$ L/s

$Q_{min} = 237$ L/s

<u>Ponto 2</u>

$P_2 = 0$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4\,Qm}{\pi\,D_2^2} = \frac{4\ \times 0{,}8}{\pi \times 0{,}3^2} = 11{,}31 \text{ m/s}$$

$$V'_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4\,Qmin}{\pi\,D_2^2} = \frac{4\ \times 0{,}237}{\pi \times 0{,}3^2} = 3{,}35 \text{ m/s}$$

$h_2 = 0$

$\eta_{(T+G)} = 70\%$

Consumo médio de uma casa rural: 200 kWh/mês

Pede-se:

a) As potências mínima e média fornecida pela turbina à rede elétrica da fazenda.

b) Considerando a vazão útil média (800 L/s), calcular a receita bruta anual obtida com a turbina (R$/kWh 0,18).

c) O número mínimo e médio de casas que podem ser abastecidas pela energia da turbina.

d) O número de chuveiros (P = 2,5 kW) que podem ser ligados ao mesmo tempo, considerando as potências média e mínima gerada pela turbina.

Solução:

a) Potência mínima e média

Teorema de Bernoulli – Cálculo da carga d'água disponível à turbina (energia/peso):

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 + E_T + hf_{1-2}$$

$$0 + 0 + 3{,}5 = 0 + \frac{0{,}42^2}{2 \times 9{,}81} + 0 + E_T + 0{,}12 \quad \Rightarrow \quad E_T = 3{,}37 \text{ mca}$$

Potência mínima: $\text{Pot}_{\text{mín T}} = \eta_{(T+G)} \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75} = 0{,}7 \times \frac{1000 \cdot 0{,}237 \cdot 3{,}37}{75} = 7{,}5 \text{ cv}$ (5,5 kW)

Potência média: $\text{Pot}_{\text{m T}} = \eta_{(T+G)} \frac{\gamma \cdot Q \cdot Hm}{75} = 0{,}7 \times \frac{1000 \cdot 0{,}800 \cdot 3{,}37}{75} = 25{,}2 \text{ cv}$ (18,5 kW)

b) Receita bruta anual obtida com a turbina ($Q = 800$ L/s)

Renda bruta média:

$$RB_m = 18{,}5 \text{ kW} \times 24 \text{ h/dia} \times 365 \text{ dias/ano} \times 0{,}18 \text{ R\$/kWh}$$

$$RB_m = \text{R\$/ano } 29.170{,}80$$

c) Nº médio e mínimo de casas abastecidas pela turbina

$$N_{mín} = \frac{5{,}5\ kW \ x \ 24 \frac{h}{dia} \ x \ 30 \frac{dias}{mês}}{200 \ \frac{kWh}{casa\ .mês}} = 19{,}8 \approx 19 \text{ casas}$$

$$N_{m} = \frac{18{,}5\ kW \ x \ 24 \frac{h}{dia} \ x \ 30 \frac{dias}{mês}}{200 \ \frac{kWh}{casa\ .mês}} = 66{,}6 \approx 66 \text{ casas}$$

d) Nº de chuveiros ligados ao mesmo tempo

Nº médio:

$$N_{mc} = \frac{Pot_{mT}}{Pot_{chuv}} = \frac{18{,}5\ kW}{2{,}5\ kw} \approx 7 \text{ chuveiros}$$

Nº mínimo:

$$N_{min\_c} = \frac{Pot_{minT}}{Pot_{chuv}} = \frac{5{,}5\ kW}{2{,}5\ kw} \approx 2 \text{ chuveiros}$$

Obs.: a potência da turbina é pequena e, portanto, não oferece muito conforto doméstico aos usuários, mas pode ser útil para o uso com equipamentos de menor potência e uso programado.

Hidrodinâmica – Condutos Forçados e Perdas de Carga

1. Condutos forçados

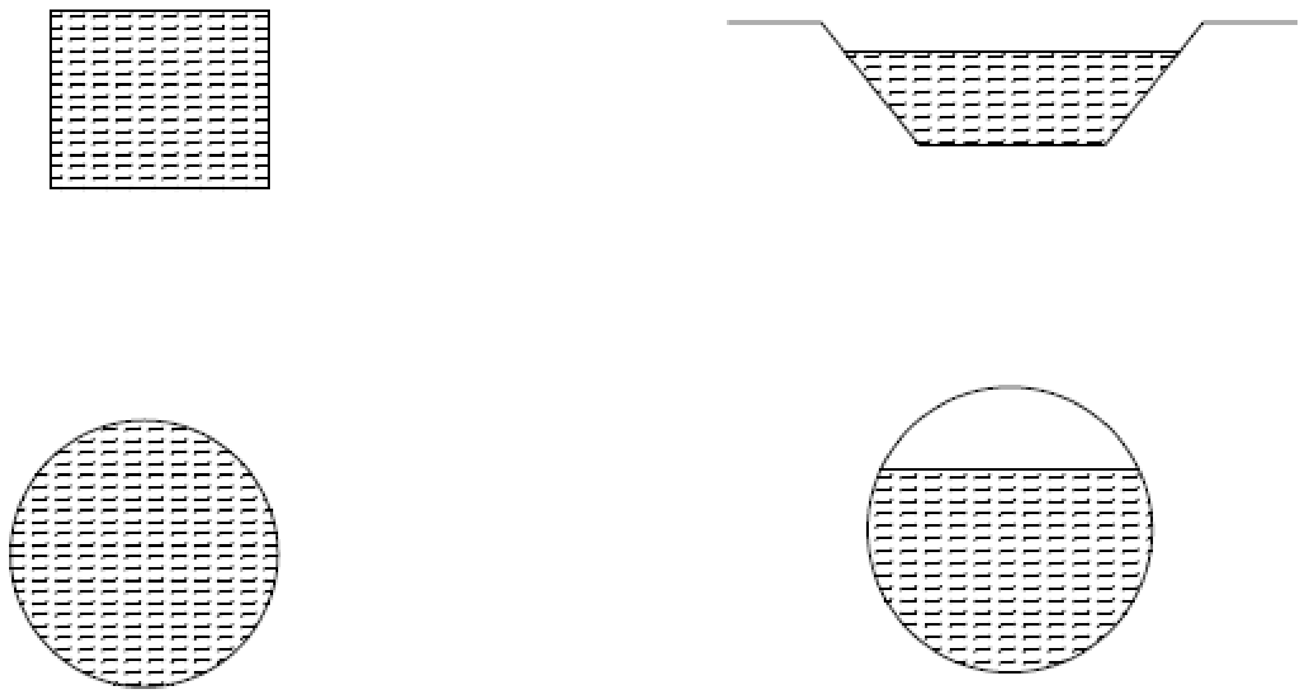
1.1. Definição:

- São canalizações em que o escoamento ocorre a uma pressão diferente da pressão atmosférica.
- Sempre fechados e escoamento com seção cheia

1.2. Comparação – Condutos forçados x Condutos livres

Esquema

CONDUTOS FORÇADOS CONDUTOS LIVRES



PRESSÃO	$P \neq Patm$	$P = P_{atm}$
ESCOAMENTO	Seção plena	Seção parcial
ENERGIA	Bomba ou gravidade	Gravidade

2. Experiência de Reynolds

2.1. Histórico - escoamento de líquidos em condutos forçados

a) Perdas de carga são proporcionais à velocidade de escoamento

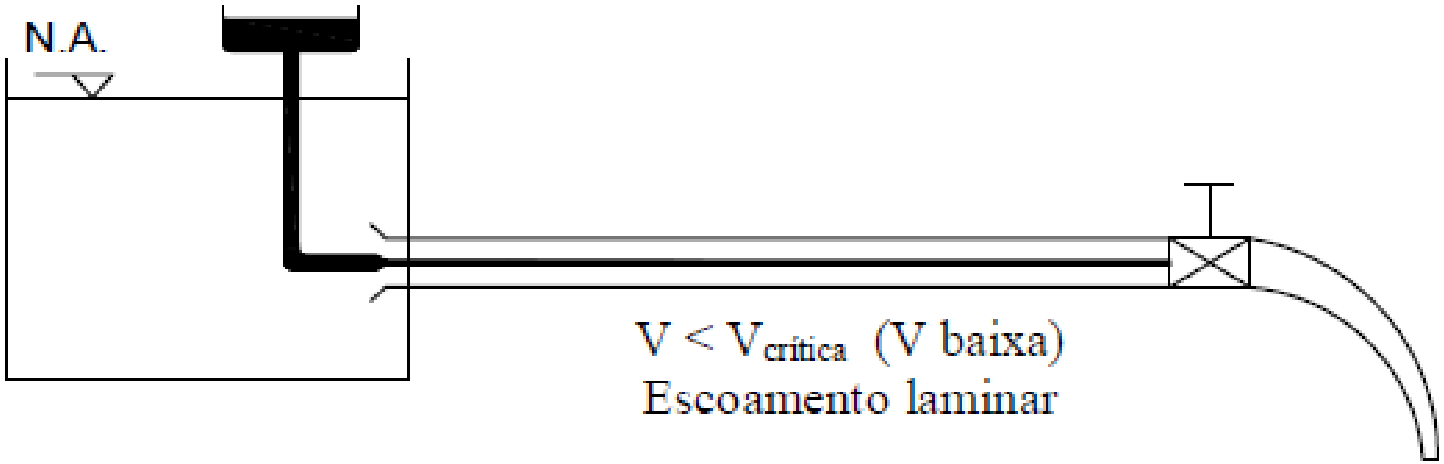
- Gotthilf Heinrich Ludwig **HAGEN** (Prússia, 1830): $hf \;\alpha\; V$

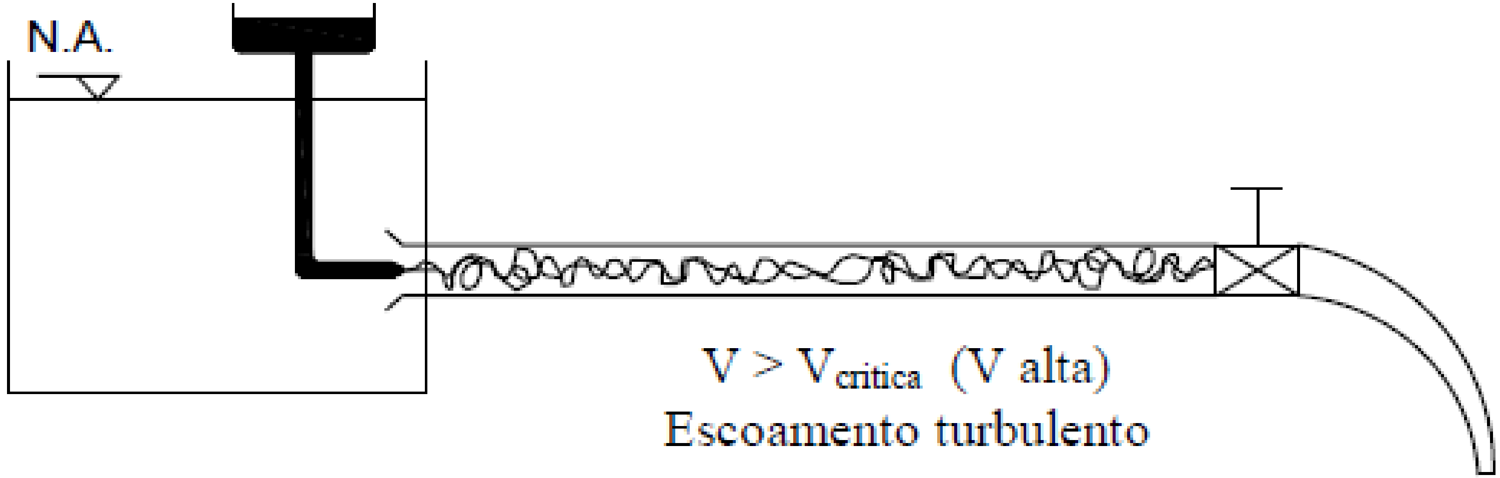
- Jean-Louis-Marie **POISEUILLE** (França, 1840): $hf \;\alpha\; V^n;\; n \approx 2$

---

b) Osborne REYNOLDS (Irlanda do Norte e Inglaterra, 1883):

- <u>Experimento em laboratório</u>





Observações de Reynolds:

- Diâmetro: D $\downarrow$ $\Rightarrow$ $\downarrow$ Turbulência

  D $\uparrow$ $\Rightarrow$ $\uparrow$ Turbulência

- Viscosidade cinemática (ν,“ni”): $\nu \uparrow$ $\Rightarrow$ $\downarrow$ Turbulência

  $\nu \downarrow$ $\Rightarrow$ $\uparrow$ Turbulência

Número de Reynolds: $$Re = \frac{V \times D}{\nu}$$

V – velocidade de escoamento, m/s

D – diâmetro do conduto, m

ν – viscosidade cinemática do líquido, m^2/s

2.2. Exemplo

a) Qual o número de Reynolds para o escoamento de água a 20°C num tubo de 50 mm de diâmetro com velocidade de escoamento de 1 m/s?

Dados:

D = 50 mm = 0,05 m

V = 1 m/s

T = 20°C ⇒ viscosidade cinemática da água (Tabela): $\nu = 10^{-6}$ m^2/s

Cálculo: $$Re = \frac{V \times D}{\nu} = \frac{1 \times 0{,}05}{10^{-6}} = 50000$$ (Escoamento turbulento)

b) Qual deveria ser a velocidade de escoamento do exemplo anterior para que o regime se tornasse laminar?

Regime laminar: Re ≤ 2000

$$Re = 2000 = \frac{V \times D}{\nu}$$

$$2000 = \frac{V \times 0{,}05}{10^{-6}} \Rightarrow \quad V = 0{,}04 \text{ m/s}$$

Obs.: O regime de escoamento laminar ocorre quando

- V é muito baixa
- D é muito pequeno
- ν é muito alta

Na maioria dos casos trabalha-se com regime de escoamento turbulento.

- Limites de velocidade em escoamento de líquidos
    - Mínimo: evita sedimentação de partículas (movimento laminar)
        Água não tratada: 0,4 m/s
        Esgoto: 0,6 m/s
        Água tratada: sem limite mínimo
    - Máximo: evita perda de carga excessiva e desgaste prematuro de condutos
        $V \leq 2{,}5$ m/s
        Medida prática: $V_{max} = 2{,}0$ m/s

4. Perdas de carga

4.1. Conceito

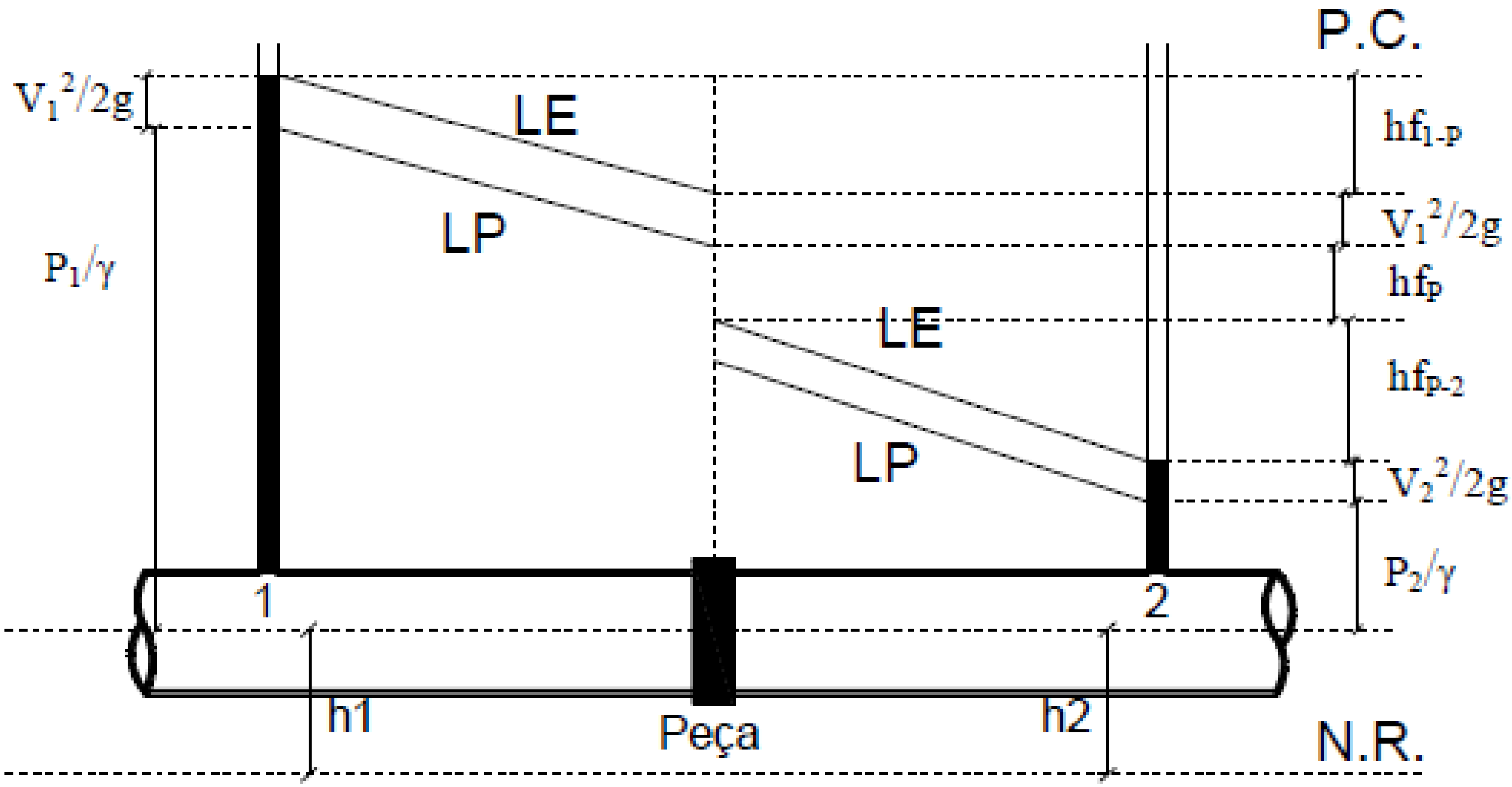
- Teorema de Bernoulli:
  - soma das energias ($P/\gamma + V^2/2g + h$) não é igual em dois pontos da tubulação
  - Perda de energia = PERDA DE CARGA
- Movimento laminar: perda devido à força de viscosidade (atrito interno)
- Movimento turbulento: perda devido à viscosidade e à inércia (atrito interno e externo)
- Princípio de Lavoisier: Perda de carga = energia transformada em calor

4.2. Classificação

Perda de carga (hf – frictional head loss)

a) Distribuída – ao longo da tubulação ($hf_{1\text{-}P}$ e $hf_{P\text{-}2}$)

b) Localizada – peça e singularidades nas tubulações (hf_P)



$hf_{1\text{-}P}$ – perda de carga no tubo (do ponto 1 até a peça)

hf_P – perda de carga na peça

$hf_{P\text{-}2}$ – perda de carga no tubo (desde a peça até o ponto 2)

4.3. Determinação da perda de carga principal (distribuída na tubulação)

a) Características do escoamento de líquidos:

A perda de carga é:

- INDEPENDENTE do material da tubulação no ESCOAMENTO LAMINAR;
- DEPENDENTE do material da tubulação no ESCOAMENTO TURBULENTO;
- diretamente proporcional a V^m (ou Q^m); m = potência de V ou de Q
- diretamente proporcional a L
- inversamente proporcional a D^n; n = potência de D
- independente da posição da canalização (no escoamento permanente)
- independente da pressão sob a qual o líquido escoa

Cálculo da perda de carga

Variáveis envolvidas:

K – coeficiente que representa a natureza do material da canalização

V – velocidade do escoamento

L – comprimento da canalização

Cálculo da perda de carga

Variáveis envolvidas:

K – coeficiente que representa a natureza do material da canalização

V – velocidade do escoamento

L – comprimento da canalização

D – diâmetro

- Formato geral das equações de perda de carga:

$$hf \propto \frac{L}{D^n} \cdot V^m$$

$$hf = K \cdot \frac{L}{D^n} \cdot V^m$$

K – coeficiente de proporcionalidade

Movimento turbulento – K depende do material da tubulação
Movimento laminar – K não depende do material da tubulação

hf – perda de carga, em mcl (metros de coluna de líquido)

L – comprimento da tubulação, em m

D – diâmetro da tubulação, em m

V – velocidade de escoamento, em m/s

Outra apresentação: Perda de carga unitária (J)

$$J = \frac{hf}{L}$$

$$J = K \cdot \frac{V^m}{D^n}$$

J – perda de carga em metros de coluna do líquido/metro de tubulação (ou m/m)

b) Formas de determinação

- Perda de carga em um trecho de tubulação (hf)
- Perda de carga unitária (J)

.4. Fórmulas empíricas de perda de carga

- Obtidas em laboratório

- Válidas para condições específicas:

    - grupo de materiais
    - tipo de líquido
    - temperatura do líquido
    - faixa de diâmetros
    - geralmente regime de escoamento turbulento

Componentes:

hf – perda de carga, mca

Q – vazão, m3/s

V – velocidade, m/s

L – comprimento, m

D – diâmetro, m

4.4.1. Fórmula de Hazen-Williams

- Allan Hazen e Gardner Williams (USA, 1920)
- Aplicação:
    - Todos os materiais
    - Diâmetro: 2" a 120" (50 a 300 mm)

Apresentações:

a) **Perda de carga em tubulação de comprimento conhecido (hf):**

$$hf = 10{,}65 \cdot \left(\frac{Q}{C}\right)^{1{,}852} \cdot \frac{L}{D^{4{,}87}}$$

C – fator de atrito (depende do material)

b) **Perda de carga unitária (J)**

$$J = \frac{hf}{L} \qquad J = 10{,}65 \cdot \frac{Q^{1{,}852}}{C^{1{,}852}\, D^{4{,}87}}$$

c) **Vazão:**

$$Q = 0{,}2788 \cdot C \cdot D^{2{,}63} \cdot \left(\frac{hf}{L}\right)^{0{,}54} \quad \text{ou} \quad Q = 0{,}2788 \cdot C \cdot D^{2{,}63} \cdot J^{0{,}54}$$

d) **Velocidade:**

$$V = 0{,}355 \cdot C \cdot D^{0{,}63} \cdot \left(\frac{hf}{L}\right)^{0{,}54} \quad \text{ou} \quad V = 0{,}355 \cdot C \cdot D^{0{,}63} \cdot J^{0{,}54}$$

e) **Diâmetro:**

$$D = 1{,}625 \cdot \left(\frac{Q}{C}\right)^{0{,}38} \cdot \left(\frac{L}{hf}\right)^{0{,}205} \quad \text{ou} \quad D = 1{,}625 \cdot \frac{Q^{0{,}38}}{C^{0{,}38}\, J^{0{,}205}}$$

4.4.2. Fórmula de Flamant

- Alfred-Aimé Flamant (França, 1883)

Apresentações:

a) Perda de carga em tubulação de comprimento conhecido (hf):

$$hf = 6{,}107 \cdot b \cdot \frac{L \cdot Q^{1,75}}{D^{4,75}}$$

b – fator de atrito (depende do material)

b) Perda de carga unitária (J)

$$J = \frac{hf}{L} \qquad \Rightarrow \qquad J = 6{,}107 \cdot b \cdot \frac{Q^{1,75}}{D^{4,75}}$$

c) Vazão:

$$Q = \frac{0{,}356}{b^{0,57}} \cdot D^{2,714} \cdot \left(\frac{hf}{L}\right)^{0,57} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{0{,}356}{b^{0,57}} \cdot D^{2,714} \cdot J^{0,57}$$

d) Velocidade:

$$V = \frac{0{,}453}{b^{0,57}} \cdot D^{0,714} \cdot \left(\frac{hf}{L}\right)^{0,57} \quad \text{ou} \quad V = \frac{0{,}453}{b^{0,57}} \cdot D^{0,714} \cdot J^{0,57}$$

e) Diâmetro:

$$D = 1{,}464 \cdot b^{0,21} \cdot Q^{0,368} \cdot \left(\frac{L}{hf}\right)^{0,21} \quad \text{ou} \quad D = 1{,}464 \cdot b^{0,21} \cdot \frac{Q^{0,368}}{J^{0,21}}$$

4.5. Perdas de carga localizadas

- Cada peça instalada na tubulação causa perda de carga

- Perda que ocorre na peça = hf_L

- Importância:
  - Sistemas de bombeamento
  - Canalizações curtas com muitas conexões (instalações prediais)
  - Cabeçal de controle (irrigação localizada)

4.5.1. Cálculo das perdas de carga localizadas

a) Método dos coeficientes (K_P)

Cada peça tem um coeficiente K_P

$$hf_l = K_p \frac{V^2}{2g}$$

TABELA A.2 - PERDA DE CARGA EM CONEXÕES - COMPRIMENTO EQUIVALENTE PARA TUBO RUGOSO (TUBO DE AÇO-CARBONO, GALVANIZADO OU NÃO)

Diâmetro Nominal (DN)	Tipo de Conexão					
	Cotovelo 90°	Cotovelo 45°	Curva 90°	Curva 45°	Tê passagem direta	Tê passagem lateral
15	0,5	0,2	0,3	0,2	0,1	0,7
20	0,4	0,3	0,5	0,3	0,1	1,0
25	0,9	0,4	0,7	0,4	0,2	1,4
32	1,2	0,5	0,8	0,5	0,2	1,7
40	1,4	0,6	1,0	0,6	0,2	2,1
50	1,9	0,9	1,4	0,8	0,3	2,7
65	2,4	1,1	1,7	1,0	0,4	3,4
80	2,8	1,3	2,0	1,2	0,5	4,1
100	3,8	1,7	2,7	--	0,7	5,5
125	4,7	2,2	--	--	0,8	6,9
150	5,6	2,6	4,0	--	1,0	8,2

TABELA A.3 - PERDA DE CARGA EM CONEXÕES - COMPRIMENTO EQUIVALENTE PARA TUBO LISO (TUBO DE PLÁSTICO, COBRE OU LIGA DE COBRE)

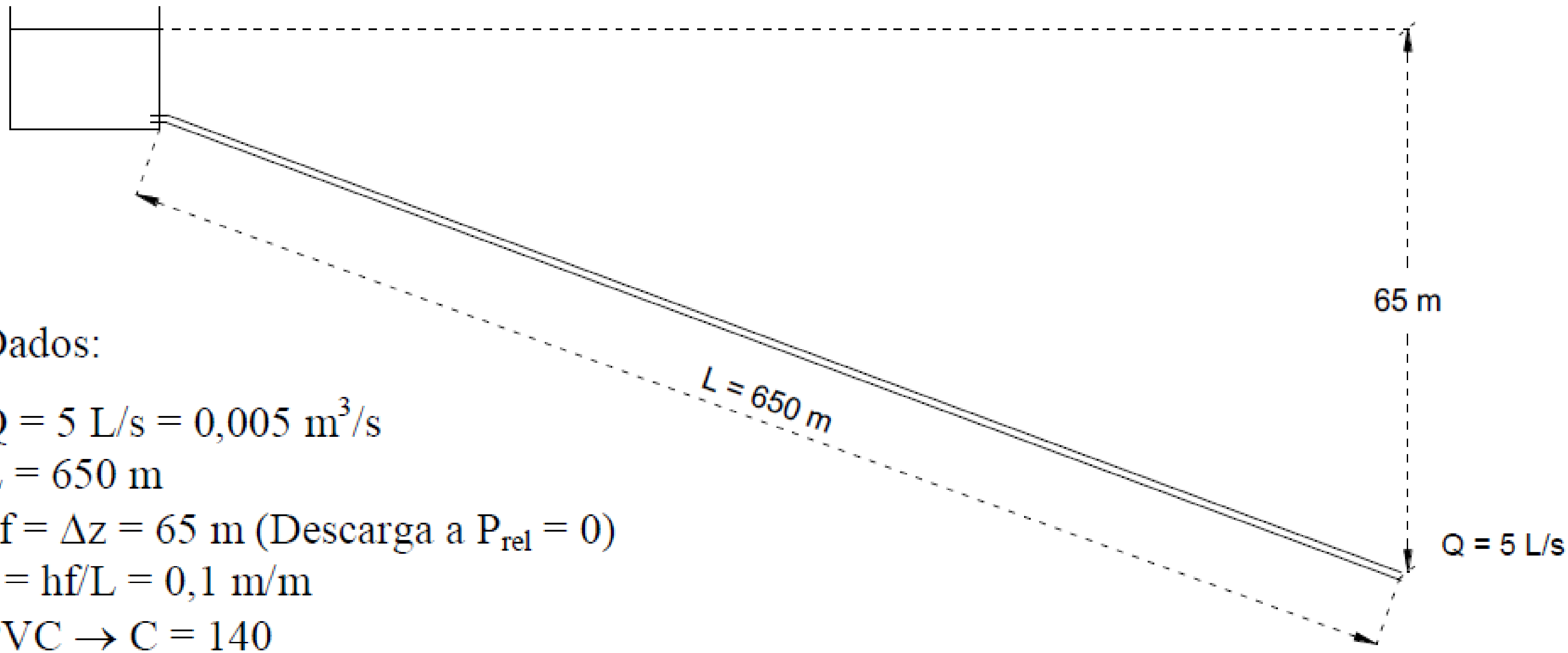
Diâmetro Nominal (DN)	Tipo de Conexão					
	Cotovelo 90°	Cotovelo 45°	Curva 90°	Curva 45°	Tê passagem direta	Tê passagem lateral
15	1,1	0,4	0,4	0,2	0,7	2,3
20	1,2	0,5	0,5	0,3	0,8	2,4
25	1,5	0,7	0,6	0,4	0,9	3,1
32	2,0	1,0	0,7	0,5	1,5	4,6
40	3,2	1,0	1,2	0,6	2,2	7,3
50	3,4	1,3	1,3	0,7	2,3	7,6
65	3,7	1,7	1,4	0,8	2,4	7,8
80	3,9	1,8	1,5	0,9	2,5	8,0
100	4,3	1,9	1,6	1,0	2,6	8,3
125	4,9	2,4	1,9	1,1	3,3	10,0
150	5,4	2,6	2,1	1,2	3,8	11,1

1. Problemas hidraulicamente determinados

1.1. Tipos

Dados	Incógnita
Q, L, K, D	hf
hf, L, K, D	Q
hf, L, K, Q	D

1.2.1. Hazen-Williams:



Dados:

$Q = 5$ L/s $= 0,005$ m^3/s
$L = 650$ m
$hf = \Delta z = 65$ m (Descarga a $P_{rel} = 0$)
$J = hf/L = 0,1$ m/m
PVC $\rightarrow C = 140$

---

a) Determine o diâmetro de um tubo de PVC para as condições do esquema acima:

Solução:

$$D = 1{,}625 \cdot \left(\frac{Q}{C}\right)^{0{,}38} \cdot \left(\frac{L}{hf}\right)^{0{,}205} \quad \text{ou} \quad D = 1{,}625 \cdot \left(\frac{Q}{C}\right)^{0{,}38} \cdot \left(\frac{1}{J}\right)^{0{,}205}$$

$$D = 1{,}625 \cdot \left(\frac{0{,}005}{140}\right)^{0{,}38} \cdot \left(\frac{650}{65}\right)^{0{,}205} \Rightarrow D = 0{,}0532 \text{ m ou } 53 \text{ mm}$$

b) Qual seria a perda de carga se fossem utilizados tubos com diâmetros de 50 ou 75 mm?

Solução:

$$hf = 10{,}65 \cdot \left(\frac{Q}{C}\right)^{1{,}852} \cdot \frac{L}{D^{4{,}87}}$$

Diâmetros comerciais disponíveis:

DN = 50 mm (DI = 0,0481 m) $\quad hf = 10{,}65 \cdot \left(\frac{0{,}005}{140}\right)^{1{,}852} \cdot \frac{650}{0{,}05^{4{,}87}} = 87{,}1 \text{ mca}$

DN = 75 mm (DI = 0,0725 m) $\quad hf = 10{,}65 \cdot \left(\frac{0{,}005}{140}\right)^{1{,}852} \cdot \frac{650}{0{,}075^{4{,}87}} = 12{,}1 \text{ mca}$

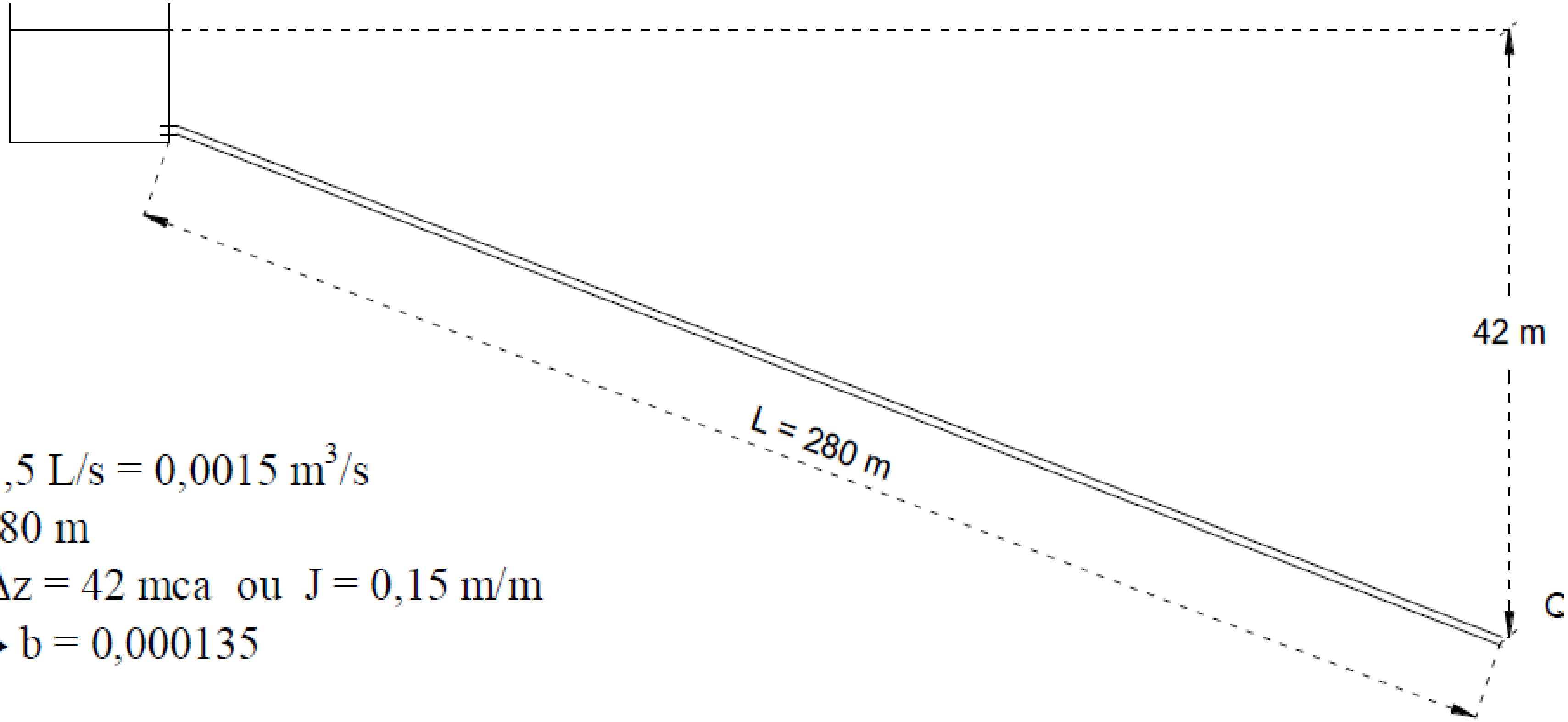
c) Como a máxima perda de carga sem bombeamento é de 65 mca, não é possível escoar 5 L/s com tubos de 50 mm ($hf = 105,2$ mca). Portanto, haverá uma diminuição da vazão. Qual será a vazão se forem utilizados tubos com diâmetro de 50 mm?

Solução:

$$Q = 0{,}2788 \cdot C \cdot D^{2,63} \cdot \left(\frac{hf}{L}\right)^{0,54} \quad \text{ou} \quad Q = 0{,}2788 \cdot C \cdot D^{2,63} \cdot J^{0,54}$$

$$Q = 0{,}2788 \cdot 140 \cdot 0{,}05^{2,63} \cdot 0{,}1^{0,54} = 0{,}00426 \text{ m}^3/\text{s} \text{ ou } 4{,}26 \text{ L/s}$$

1.2.2. Flamant:



Dados:

$Q = 1{,}5\ L/s = 0{,}0015\ m^3/s$
$L = 280\ m$
$hf = \Delta z = 42\ mca$ ou $J = 0{,}15\ m/m$
$PE \rightarrow b = 0{,}000135$

a) Determine o diâmetro de um tubo de polietileno (PE) para as condições do esquema ac

Solução:

$$D = 1{,}464 \cdot b^{0{,}21} \cdot Q^{0{,}368} \cdot \left(\frac{L}{hf}\right)^{0{,}21} \quad \text{ou} \quad D = 1{,}464 \cdot b^{0{,}21} \cdot \frac{Q^{0{,}368}}{J^{0{,}21}}$$

$$D = 1{,}464 \cdot 0{,}000135^{0{,}21} \cdot \frac{0{,}0015^{0{,}368}}{0{,}15^{0{,}21}} \Rightarrow \quad D = 0{,}0307 \text{ m ou } 30{,}7 \text{ mm}$$

Solução:

$$D = 1{,}464 \cdot b^{0,21} \cdot Q^{0,368} \cdot \left(\frac{L}{hf}\right)^{0,21} \quad \text{ou} \quad D = 1{,}464 \cdot b^{0,21} \cdot \frac{Q^{0,368}}{J^{0,21}}$$

$$D = 1{,}464 \cdot 0{,}000135^{0,21} \cdot \frac{0{,}0015^{0,368}}{0{,}15^{0,21}} \Rightarrow \quad D = 0{,}0307 \text{ m ou } 30{,}7 \text{ mm}$$

b) Qual seria a perda de carga se forem utilizados tubos com diâmetros de 32 ou 40 mm?

Solução:

$$hf = 6{,}107 \cdot b \cdot Q^{1{,}75} \cdot \frac{L}{D^{4{,}75}}$$

Diâmetros comerciais disponíveis:

DN = 32 mm (DI = 0,029 m) $$hf = 6{,}107 \cdot 0{,}000135 \cdot Q^{1{,}75} \cdot \frac{280}{0{,}029^{4{,}75}} = 53{,}1 \text{ mca}$$

DN = 40 mm (DI = 0,036 m) $$hf = 6{,}107 \cdot 0{,}000135 \cdot Q^{1{,}75} \cdot \frac{280}{0{,}036^{4{,}75}} = 19{,}0 \text{ mca}$$

c) Como a máxima perda de carga sem bombeamento é de 42 mca, não é possível escoar 1,5 L/s com tubos de 32 mm (hf = 53,1 mca). Portanto, haverá uma diminuição da vazão. Qual será a vazão se forem utilizados tubos com diâmetro de 32 mm?

Solução:

$$Q = \frac{0{,}356}{b^{0{,}57}} \cdot D^{2{,}714} \cdot \left(\frac{hf}{L}\right)^{0{,}57}$$

$$Q = \frac{0{,}356}{0{,}000135^{0{,}57}} \cdot 0{,}029^{2{,}714} \cdot \left(\frac{42}{280}\right)^{0{,}57} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q = 0{,}0013 \text{ m}^3/\text{s} \text{ ou } 1{,}3 \text{ L/s}$$

2. Fórmula Universal de perda de carga (Darcy-Weisbach)

2.1. Desenvolvimento teórico

a) Autores:

- **Julies Weisbach** (Saxônia – Alemanha, 1845)

- **Henry D'Arcy** (França, 1857)

- Colaboradores: Chézy, **Weisbach, Darcy**, Poiseuille, Reynolds, Fanning, Blasius, Kármaán, Prandtl, Colebrook, White, Rouse, Nikuradse, Mo

- Fórmula semi-empírica: base na física teórica + experimentação em laboratório

b) Aplicação:

- Qualquer material de canalização
- Qualquer líquido
- Qualquer temperatura do líquido
- Qualquer diâmetro
- Regime de escoamento laminar ou turbulento

c) Fórmula:

$$hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

hf – perda de carga, mca

L – comprimento da tubulação, m

D – diâmetro da tubulação, m

V – velocidade de escoamento, m/s

g – aceleração da gravidade, m/s^2

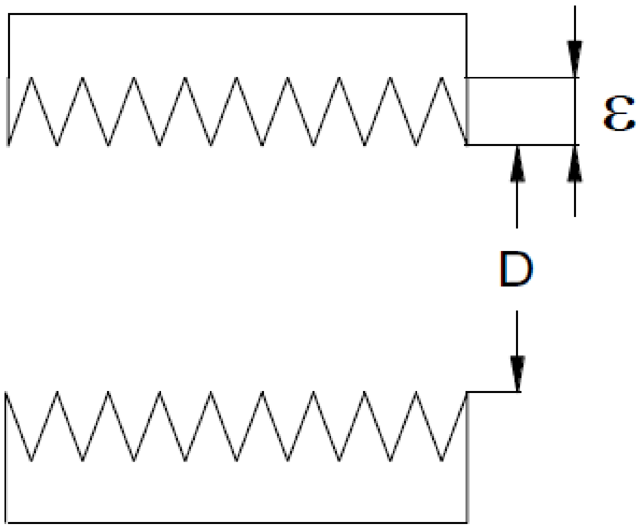
f – fator de atrito, dependente do material da canalização e do número de Reynolds

$f = f(Re, \varepsilon/D)$

ε - rugosidade do material do tubo, m ou mm

ε/D – rugosidade relativa, m/m ou mm/mm

Esquema de paredes do tubo (D e ε)



ε/D = rugosidade relativa

K/D = rugosidade equivalente

(Grãos de areia)

K – aspereza determinada com partículas de areia de tamanho conhecido

2.2. Determinação do fator de atrito (f)

2.2.1. Método gráfico - Diagrama de Moody

- Entregar o diagrama para os alunos
- Apresentar Diagrama de Moody no data show.
- Explicar como utilizá-lo

Exemplo: $\varepsilon/D = 0{,}004$; $Re = 300000$ (3×10^5); $f = 0{,}028$

2.2.2. Método algébrico

a) Movimento laminar (Re ≤ 2000)

$$f = \frac{64}{Re} \qquad\qquad \mathrm{Re} = \frac{\mathrm{V \times D}}{\upsilon}$$

Re – número de Reynolds

b) Movimento crítico (2000 ≤ Re ≤ 4000)

- Valor de f é indeterminado (não se estima com precisão)

c) Movimento turbulento (Re > 4000)

- $f = f\,(Re,\ \varepsilon/D)$

- Equações para cálculo de f em escoamento turbulento (Re > 4000)

c.1) Equação de Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{2{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{Re\,\sqrt{f}}\right)$$

- Solução difícil, por processo iterativo

- Solução simplificada c/ diagrama de Moody

c.2) Equação de Swamee-Jain

- criada para substituir o uso do diagrama de Moody

- solução simples, sem processo iterativo

$$f = \frac{0,25}{\left[\log\left(0,27\frac{\varepsilon}{D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}}\right)\right]^2}$$

c.3) Explicitação da Fórmula Universal para problemas hidraulicamente determinados

I - Perda de carga:

$$hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \qquad \text{ou} \qquad J = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

Fórmula Universal + f (Swamee-Jain):

$$J = \frac{0{,}203\ \dfrac{Q^2}{g\ D^5}}{\left[\log\left(0{,}27\ \dfrac{\varepsilon}{D} + \dfrac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2}$$

II – Vazão:

$$Q = -\frac{\pi}{2}\log\left(0{,}27\frac{\varepsilon}{D} + \frac{1{,}78\ \upsilon}{D\sqrt{g\ D\ J}}\right)\cdot D^2\cdot\sqrt{g\ D\ J}$$

III – Diâmetro:

$$D = \frac{0{,}66\cdot\left\{\left[\varepsilon\cdot\left(\frac{g\ J}{Q^2}\right)^{0{,}2}\right]^{1{,}25} + \upsilon\cdot\left(\frac{1}{g\ J\ Q^3}\right)^{0{,}2}\right\}^{0{,}04}}{\left(\frac{g\ J}{Q^2}\right)^{0{,}2}}$$

2.2.3. Exemplos:

I. Numa canalização com diâmetro 25 mm, rugosidade de 0,1 mm e comprimento de 200 m, a água escoa com uma vazão de 1 L/s, à temperatura de 20°C. Calcule a perda de carga que ocorre na canalização.

Dados:

$D = 25$ mm (0,025 m)
$\varepsilon = 0{,}1$ mm (0,0001 m)
$Q = 0{,}001\ m^3/s$
$T = 20°C \Rightarrow \nu = 1{,}01 \times 10^{-6}$ (Tabela de propriedades físicas da água)

Solução:

$\varepsilon / D = 0{,}004$

$V = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{4 \times 0{,}001}{\pi \times 0{,}025^2} = 2{,}04$ m/s

$Re = \frac{V \times D}{\upsilon} = \frac{2{,}04 \times 0{,}025}{1{,}01 \times 10^{-6}} = 504952$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon / D = 0{,}004 \\ \\ Re = 5{,}05 \times 10^4 \end{array}\right\}$

Diagrama de Moody $\Rightarrow$ f = 0,032

Fórmula de Swamee-Jain $\Rightarrow$ f = 0,031

Fórmula Universal: $hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$

$$hf = 0{,}031 \cdot \frac{200}{0{,}025} \cdot \frac{2{,}04^2}{19{,}62} = 52{,}6 \text{ mca}$$

J = hf / L = 52,6 / 200

J = 0,263 m/m

II. Por um tubo gotejador de diâmetro 0,8 mm passa uma vazão de 1 L/h (água a 20°C), com perda de carga de 15 mca. Pede-se:

a) a velocidade de escoamento;

b) o número de Reynolds;

c) verificar o regime de escoamento;

d) o comprimento do tubo

Dados:

$D = 0{,}8 \text{ mm} = 0{,}0008 \text{ m}$

$Q = 1 \text{ L/h} = 0{,}000002278 \text{ m}^3/\text{s}$

Água a 20°C $\Rightarrow \nu = 1{,}01 \times 10^{-6}$

$hf = 15 \text{ mca}$

Solução:

a) $V = \dfrac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \dfrac{4 \times 0{,}0000002278}{\pi \times 0{,}0008^2} = 0{,}553 \text{ m/s}$

b) $Re = \dfrac{V \times D}{\upsilon} = \dfrac{0{,}553 \times 0{,}0008}{1{,}01 \times 10^{-6}} = 438$

c) Re < 2000 $\therefore$ Escoamento laminar

d) $f = \dfrac{64}{438} = 0{,}1461$

$$hf = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$L = \frac{hf\ D\ 2g}{f\ V^2} = \frac{15 \times 0{,}0008 \times 19{,}62}{0{,}1461 \times 0{,}553^2} = 5{,}27 \text{ m}$$

3. Perdas de carga localizadas

- Cada peça instalada na tubulação causa perda de carga
- Perdas de carga que ocorrem nas peças = hf_L

3.1 Cálculo das perdas de carga localizadas

a) Método dos coeficientes (K)

$$hf_l = K\frac{V^2}{2g}$$

hf_L – perda de carga localizada, mca

V – velocidade de escoamento, m/s

g – aceleração da gravidade, m/s^2

b) Método dos comprimentos equivalentes (L_{eq})

- Para efeito de cálculo adiciona-se comprimentos que correspondem à perda causada pelas peças existentes na tubulação
- Comprimento da tubulação: L
- Comprimento equivalente às peças na tubulação: Le
- Comprimento total: $L_T = L + Le$

3.2 Exemplo:

Calcular a perda de carga no esquema a seguir:

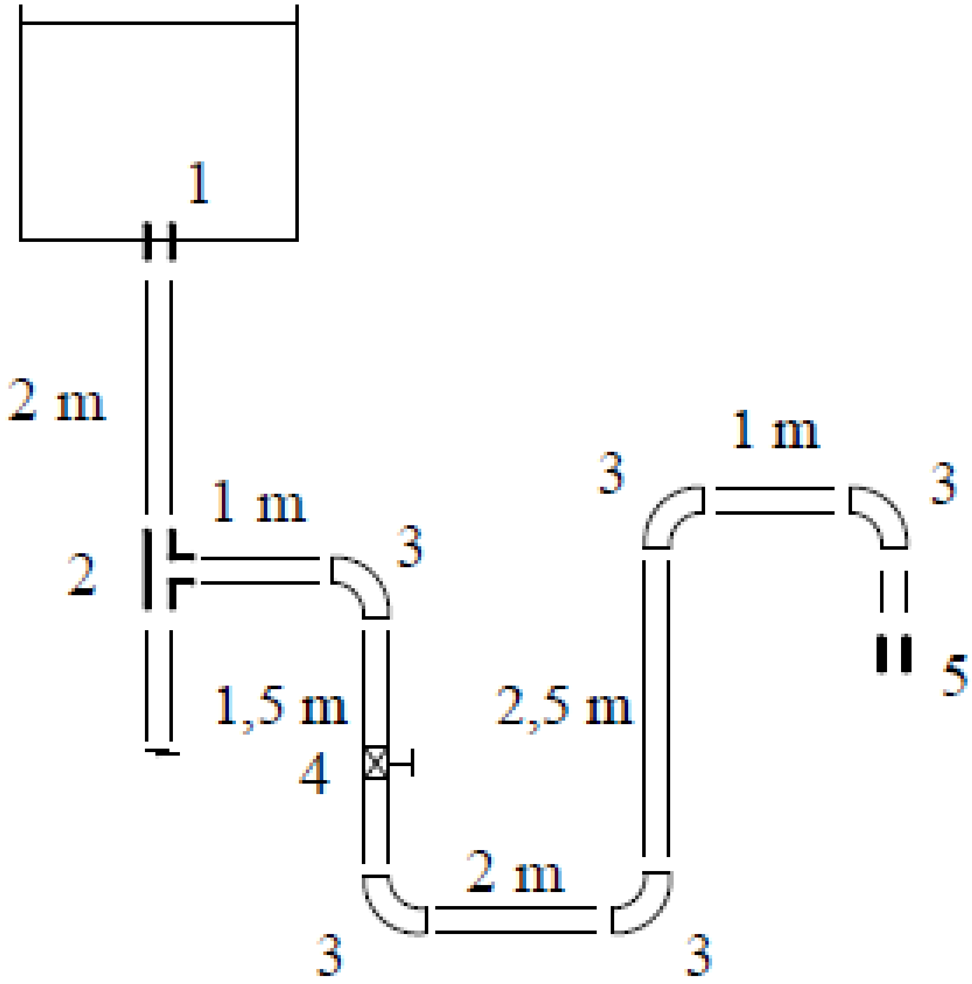
D = 25 mm

(DI = 0,0216 m)

Material: PVC

Q = 0,5 L/s

PVC (b = 0,000135)



Peça	Quantidade	K	Le
Entrada reentrante	1	1,0	1,0
Tê de saída lateral	1	1,3	1,7
Curva 90° raio longo	5	0,4	0,3
Registro de gaveta aberto	1	0,2	0,2
Saída de canalização	1	1,0	0,7

a) Método dos comprimentos equivalentes (Le):

Tubulação: L = 2 + 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 1 = 10 m

Peças: Le = 1,0 + 1,7 + 5 x 0,3 + 0,2 + 0,7 = 5,1 m

L' = L + Le = 15,1 m

$$hf = 6{,}107 \cdot b \cdot Q^{1{,}75} \cdot \frac{L}{D^{4{,}75}} \qquad hf = 6{,}107 \cdot 0{,}000135 \cdot 0{,}0005^{1{,}75} \cdot \frac{15{,}1}{0{,}0216^{4{,}75}}$$

hf_T = 1,7 mca

b) Método algébrico (K):

Perda de carga na tubulação (distribuida):

L = 10 m $\Rightarrow$ $hf = 6{,}107 \cdot 0{,}000135 \cdot 0{,}005^{1{,}75} \cdot \frac{10}{0{,}0216^{4{,}75}}$ = 1,12 mca

Perda de carga nas peças (localizada):

$hf_l = K\frac{V^2}{2g}$ $V = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{4 \times 0{,}005}{\pi \times 0{,}0216^2}$ = 1,36 m/s

$hf_{l1} = 1{,}0 \times \frac{1{,}36^2}{19{,}62}$ = 0,094 mca

$hf_{l1} = 1{,}3 \times \frac{1{,}36^2}{19{,}62}$ = 0,123 mca

$hf_{l1} = 0{,}4 \times \frac{1{,}36^2}{19{,}62}$ = 0,038 mca x 5 peças = 0,19 mca

$hf_{l1} = 0{,}2 \times \frac{1{,}36^2}{19{,}62}$ = 0,019 mca

$hf_{l1} = 0{,}9 \times \frac{1{,}36^2}{19{,}62}$ = 0,089 mca

---

Soma de hf_l = 0,52 mca

hf = 1,17 + 0,52 = 1,64 mca