

AULA 04

Hidrostática

- Empuxo: conceito
- Empuxo em superfícies sólidas

Hidrodinâmica

- Conceito
- Vazão e descarga
- Classificação dos movimentos dos líquidos
- Regimes de escoamento
- Equação da continuidade
- Teorema de Bernoulli
- Aplicações práticas

1. Hidrostática

1.1 Empuxo

Princípio de Arquimedes: *“Todo corpo imerso total ou parcialmente num fluido em equilíbrio, dentro de um campo gravitacional, fica sob a ação de uma força vertical, com sentido ascendente, aplicada pelo fluido. Esta força é denominada empuxo (E), cuja intensidade é igual ao peso do líquido deslocado pelo corpo”.*

- Conceito: é a força hidrostática resultante exercida por um fluido sobre um corpo que esteja imerso nele.
 - O empuxo existe graças à diferença de pressão hidrostática do corpo
-

- Pressão é proporcional à massa específica do líquido (ρ), à aceleração da gravidade (g) e à profundidade de imersão (h)

$$P \propto (\rho, g, h)$$

- P é maior na parte inferior do corpo (maior profundidade)
- P gera uma força resultante chamada Empuxo (Princípio de Arquimedes).
- Empuxo é a força resultante da pressão de um fluido sobre uma área de contato com um corpo imerso nele.

$$E = P \cdot A$$

$$P = \gamma \cdot h \quad \Rightarrow \quad E = \gamma \cdot h \cdot A$$

em que:

γ – peso específico do fluido

h – altura da coluna de fluido

A – área de contato entre o corpo imerso e o fluido

Exemplo: empuxo atuante sobre uma comporta circular



Dados:

Pressão: $P = 1000 \text{ kgf m}^{-2}$

Diâmetro: $D = 0,5 \text{ m}$

Área: $A = \frac{\pi D^2}{4} = 0,19635 \text{ m}^2$

Empuxo: $E = P \times A$

$$E = 1000 \times 0,19635$$

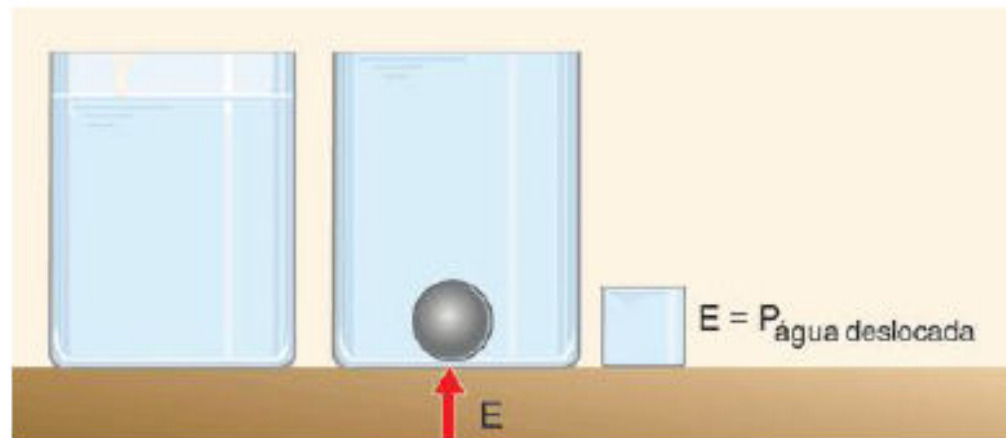
$$E = 196,35 \text{ kgf}$$

$$\text{SI: } E = 196,35 \times 9,81 = 1926,2 \text{ N}$$

$$(1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N})$$

- Empuxo é igual ao peso do líquido deslocado

Ex.: esfera metálica em líquido



$$E = F_{P_{\text{liq}}}$$

$$F_p = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad E = m_{\text{liq}} \cdot g$$

$$\rho = m / \text{Vol} \quad \Rightarrow \quad m = \rho \cdot \text{Vol}$$

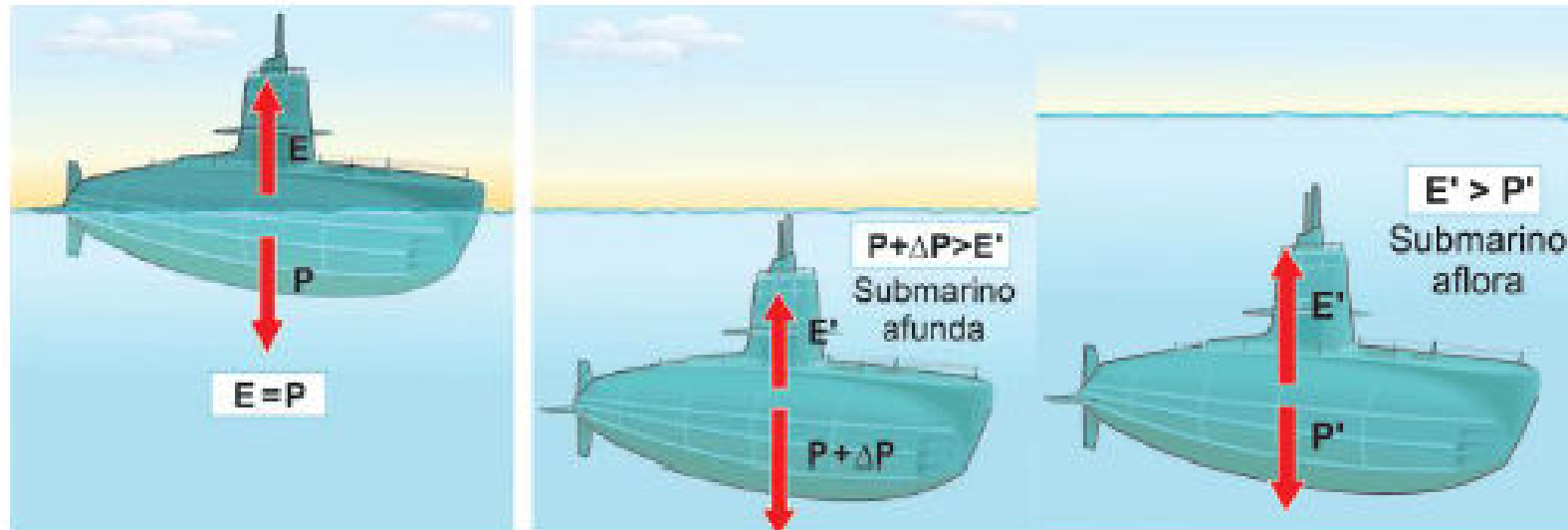
$$E = \rho \cdot g \cdot \text{Vol}$$

$$\rho \cdot g = \gamma \quad \Rightarrow \quad E = \gamma_{\text{liq}} \cdot \text{Vol}_{\text{corpo}}$$

Aplicação: Flutuabilidade de um corpo na água

Exemplo:

A. Submarino



Empuxo agindo sobre o corpo: $E = \gamma_{\text{liq.}} \cdot \text{Vol}_{\text{corpo}}$

Peso do corpo: $F_p = \gamma_{\text{corpo}} \cdot \text{Vol}_{\text{corpo}}$

a) $F_p < E$ ($\gamma_c < \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$) $\Rightarrow$ Corpo flutua no líquido

b) $F_p = E$ ($\gamma_c = \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$) $\Rightarrow$ Corpo em equilíbrio e totalmente imerso no líquido

c) $F_p > E$ ($\gamma_c > \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$) $\Rightarrow$ Corpo afunda no líquido

B. Um objeto com massa de 10 kg e volume de 0,002 m³ está totalmente imerso dentro de um reservatório de água ($\gamma_{H_2O} = 1000 \text{ kgf m}^{-3}$), determine:

B.1- O valor do peso do objeto ($g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$)

B.2 - A intensidade da força de empuxo que a água exerce sobre o objeto

B.3 - O peso aparente do objeto quando imerso na água

Solução:

B.1 - Peso do objeto:

$$P_c = m \cdot g = 10 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m s}^{-2} = 98,1 \text{ kg m s}^{-2} \text{ ou } 98,1 \text{ N}$$

B.2 – Empuxo:

$$E = \gamma_{H_2O} \cdot V_c = 1000 \text{ kgf m}^{-3} \times 0,002 \text{ m}^3$$

$$E = 2 \text{ kgf ou } 19,62 \text{ N (1 kgf} = 9,81 \text{ N)}$$

B.3 – Peso aparente

$$P_{AC} = P_c - E = 98,1 - 19,62$$

$$P_{AC} = 78,48 \text{ N}$$

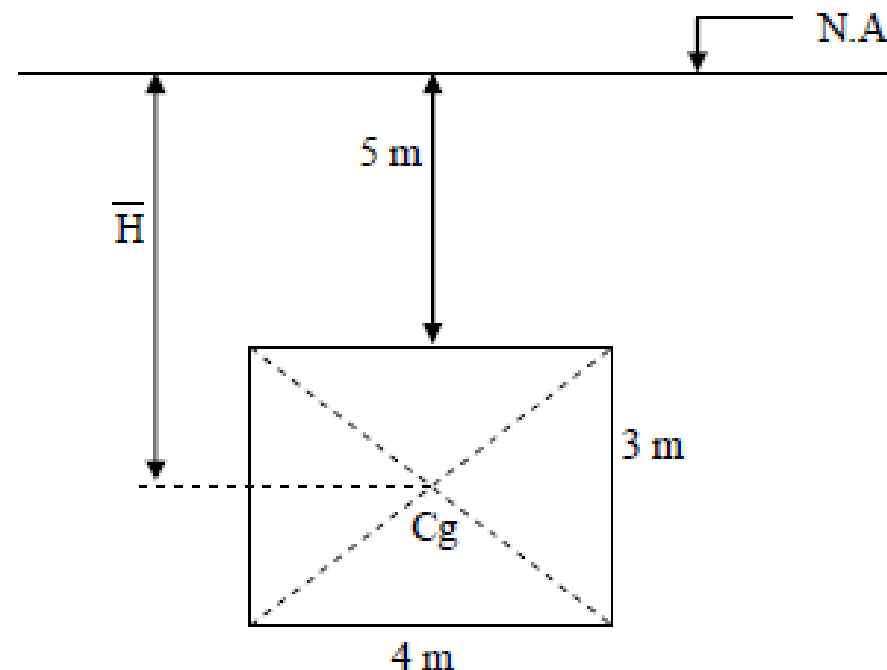
2. Empuxo sobre superfícies sólidas

2.1 Superfícies planas imersas em líquido

- Perpendicular à superfície
- Igual ao produto da área pela pressão no centro de gravidade (Cg)

$$E = P \times A$$

Exemplo: Empuxo exercido pela água em uma comporta vertical de 3 x 4 m, cujo topo está imerso em água e encontra-se a 5 m de profundidade.



$$\gamma_{H_2O} = 1000 \text{ kgf m}^{-3}$$

$$P = \gamma_{H_2O} \cdot h$$

$$E = P \cdot A = \gamma_{H_2O} \cdot \bar{H} \cdot A$$

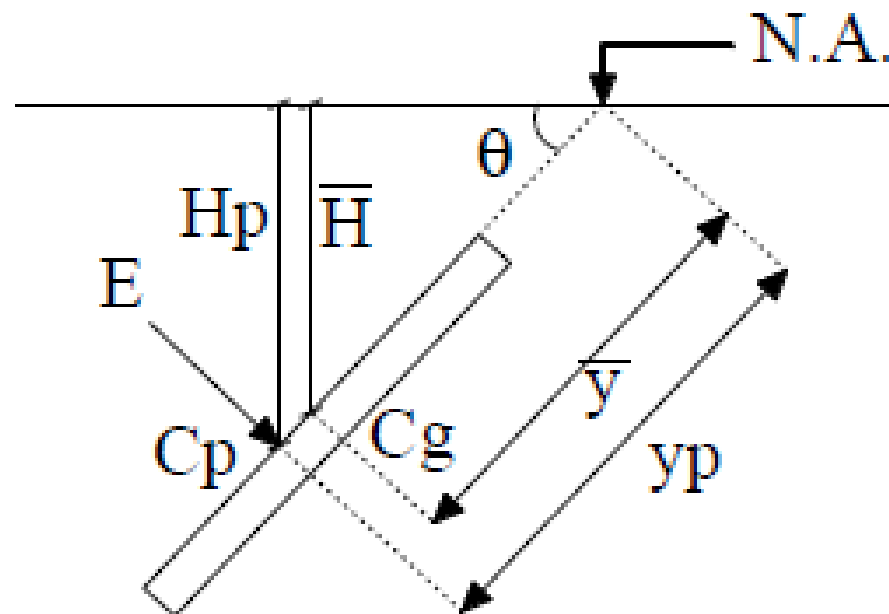
$$\bar{H} = 5 + \frac{3}{2} = 6,5 \text{ m}$$

$$E = 1000 \cdot 6,5 \cdot (3 \times 4)$$

$$E = 78000 \text{ kgf}$$

2.2 Superfícies inclinadas imersas em líquido

- Ponto de aplicação do empuxo: Centro de pressão (C_p)
- C_p situa-se um pouco abaixo do centro de gravidade (C_g)



θ = ângulo de inclinação

$$H_p = Y_p \sen \theta$$

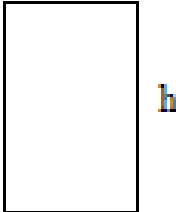
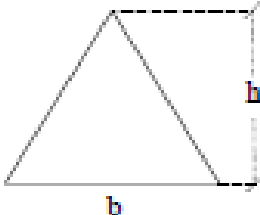
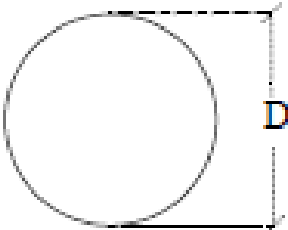
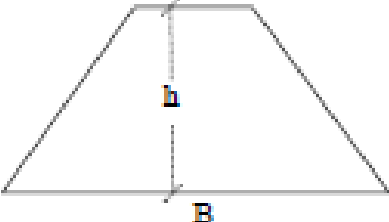
$$\bar{H} = \bar{Y} \sen \theta$$

$$Y_p = \bar{Y} + \frac{I_o}{A \bar{Y}}$$

A – área de atuação do empuxo

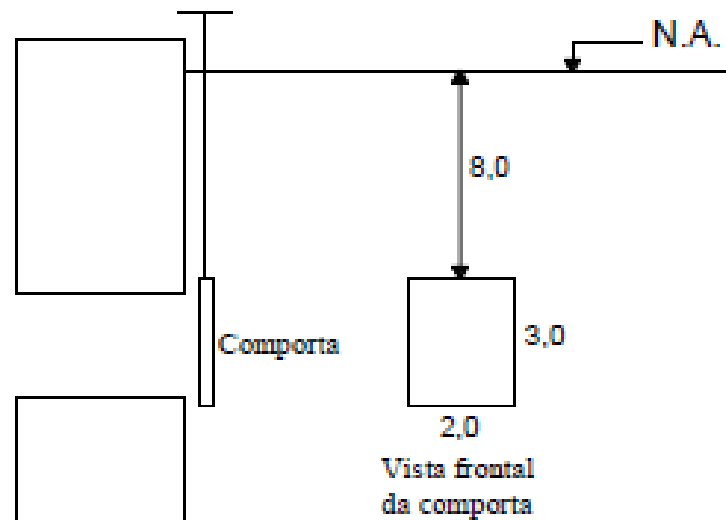
I_o – momento de inércia da área de atuação da pressão

Momento de inércia de algumas formas geométricas:

Figura	A	I _o
	$b \cdot h$	$\frac{b h^3}{12}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$\frac{b h^3}{36}$
	$\frac{\pi \cdot D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$
	$\frac{(b + B)}{2} \cdot h$	$\frac{h^3}{36} \cdot \frac{B^2 + 4 B b + b^2}{B + b}$

Exemplos:

a) Determinar o empuxo e o centro de pressão da comporta esquematizada abaixo:



Empuxo:

$$E = \gamma \cdot \bar{H} \cdot A$$

$$E = 1000 \text{ kgf m}^{-3} \cdot (8 + 1,5) \text{ m} \cdot (2 \cdot 3)$$

$$E = 57000 \text{ kgf}$$

Retângulo: momento de inércia (I_o), área (A) e profundidade do centro de gravidade ($\bar{Y}$)

$$I_o = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$A = 2 \times 3 = 6 \text{ m}^2$$

$$I_o = \frac{2 \times 3^3}{12} = 4,5 \text{ m}^4$$

$$\bar{Y} = 8 + \frac{3}{2} = 9,5 \text{ m}$$

Centro de pressão:

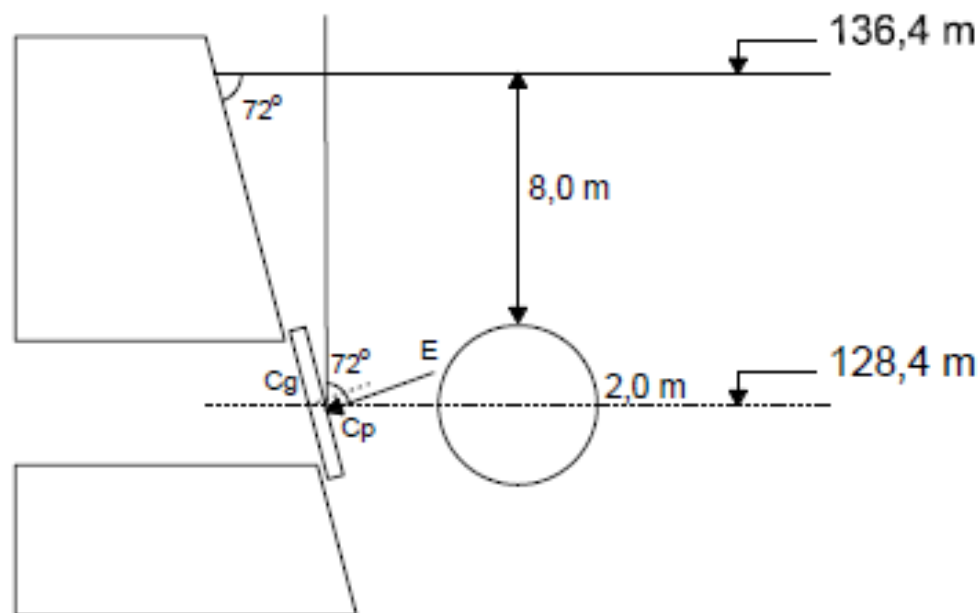
$$Y_p = \bar{Y} + \frac{I_o}{A \cdot \bar{Y}}$$

$$Y_p = 9,5 + \frac{4,5}{6 \cdot 9,5}$$

$$Y_p = 9,579 \text{ m}$$

b) A abertura do sangradouro de uma barragem é um orifício circular com inclinação de 72° em relação à horizontal. Esse orifício está fechado por uma comporta (chapa de ferro) plana com diâmetro de 2 metros. Se o nível de água se mantém na cota 136,4 m e o centro do orifício está na cota 127,4 m, calcule:

- a força que se deve aplicar em uma haste vertical para suspender a chapa;
- a distância do centro da chapa em que deverá estar a conexão da haste com a tampa, para que a chapa seja suspensa por igual.



Força para levantar a comporta:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 2^2}{4} = 3,14 \text{ m}^2$$

$$E = \gamma \cdot \bar{H} \cdot A \quad 1000 \times 9 \times 3,14 = 28260 \text{ kgf}$$

$$F = E \cdot \cos 72^\circ = 28260 \times \cos 72^\circ = 8732,82 \text{ kgf}$$

Centro de pressão:

$$Y_p = \bar{Y} + \frac{I_o}{A \bar{Y}}$$

$$H = \bar{Y} \cdot \text{sen } \theta \quad \Rightarrow \quad \bar{Y} = \frac{\bar{H}}{\text{sen } \theta} = \frac{9 \text{ m}}{\text{sen } 72^\circ}$$

$$\bar{Y} = 9,46 \text{ m}$$

$$A = 3,14 \text{ m}^2$$

$$I_o = \frac{\pi \cdot 2^4}{64} = 0,785 \text{ m}^4$$

$$Y_p = 9,46 + \frac{0,785}{3,14 \cdot 9,46}$$

$$Y_p = 9,48 \text{ m}$$

Portanto, a haste deve ser conectada a uma distância de $(9,48 - 9,46 \text{ m}) = 0,02 \text{ m}$ do Cg da comporta.

3. Hidrodinâmica

3.1 Conceito:

- Estudo dos fluidos em movimento
- Fluido perfeito: não tem viscosidade, atrito, coesão ou elasticidade (incompressível)

HIDRODINÂMICA

**Princípios gerais do
movimento dos fluidos.**

Teorema de Bernoulli



Movimento dos fluidos perfeitos

A hidrodinâmica tem por objeto o estudo do movimento dos fluidos.

Consideremos um fluido perfeito em movimento, referindo-se as diversas posições dos seus pontos a um sistema de eixos retangulares $\mathbf{0}_x, \mathbf{0}_y, \mathbf{0}_z$.

Movimento determinado em qualquer instante t , se conhecidas a grandeza e a direção da velocidade $\mathbf{v}$ relativa a qualquer ponto; ou então, se forem conhecidas as componentes $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$, dessa velocidade, segundo os três eixos considerados.

Fluido perfeito = não possui viscosidade, não apresenta atrito interno, incompressível, massa específica constante.

Vazão ou descarga

Chama-se vazão (Q) ou descarga, numa determinada seção, o volume de líquido que atravessa essa seção na unidade de tempo.

No SI, a vazão é expressa em m^3/s . Também são utilizados m^3/h , L/s e L/h .

$$Q = A \times V$$

Q = vazão (m^3/s)

V = velocidade média na seção (m/s)

A = área da seção de escoamento (m^2)

Exemplo

Calcular a vazão de água que circula à velocidade de 2 m/s por um tubo de 50 mm de diâmetro. Responder em m³/s, m³/h, m³/dia, L/s e L/h.

Solução

$$A = \frac{\pi(D)^2}{4} \rightarrow A = 0,785(D)^2$$

$$A = 0,785 \times (5 \cdot 10^{-2} m)^2 \quad A = 0,00196 m^2$$

$$Q = A \times V$$

$$Q = 0,00196 m^2 \times 2 \frac{m}{s}$$

$$Q = 0,00392 \frac{m^3}{s}$$

$$Q = 0,00392 \frac{m^3}{s} \times 3600 \frac{s}{h} = 14,112 \frac{m^3}{h}$$

$$Q = 0,00392 \frac{m^3}{s} \times 86.400 \frac{s}{dia} = 338,69 \frac{m^3}{dia}$$

$$Q = 0,00392 \frac{m^3}{s} \times 1000 \frac{L}{m^3} = 3,92 \frac{L}{s}$$

$$Q = 3,92 \frac{L}{s} \times 3600 \frac{s}{h} = 14.112 \frac{L}{h}$$

Vazão ou descarga

A também pode ser expressa em termos de massa e peso.

Vazão em massa (Q_m)

$$Q_m = \frac{\text{massa}}{\text{tempo}} \rightarrow \frac{\rho \times Vol}{t}$$

$$Q_m = \rho \frac{Vol}{t} \rightarrow Q_m = \rho \times Q$$

onde Q_m é dada em kg/h,
kg/min, kg/s.

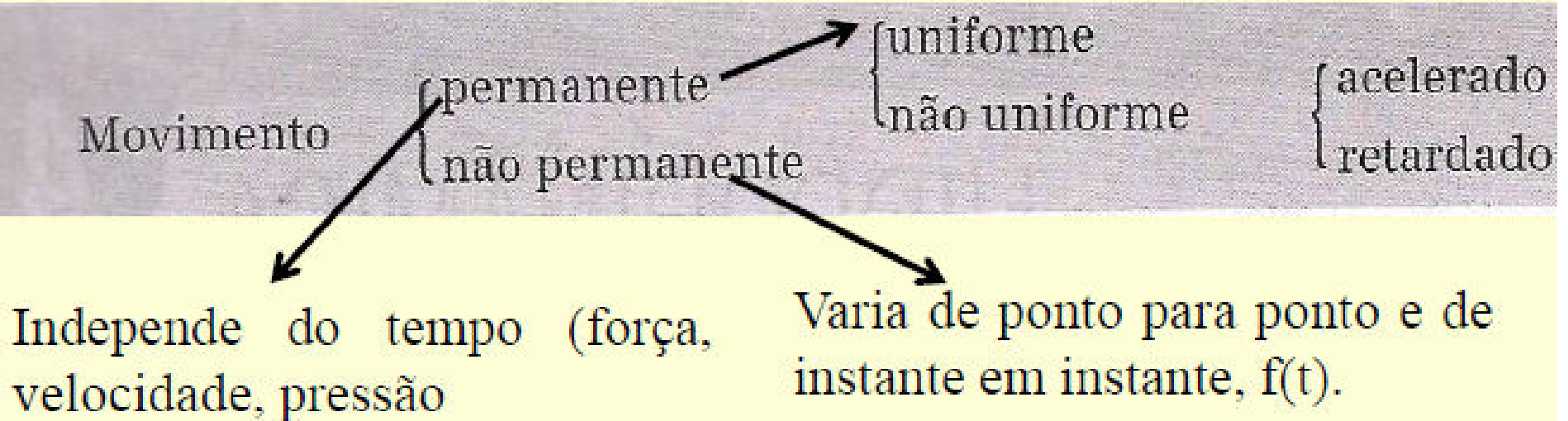
Vazão em massa (Q_p)

$$Q_p = \frac{\text{peso}}{\text{tempo}} \rightarrow Q_p = \frac{\gamma \times Vol}{t}$$

$$Q_p = \gamma \times \frac{Vol}{t} \rightarrow Q_p = \gamma \times Q$$

onde Q_p é dada em N/h,
N/min, N/s, kgf/h, kgf/min.

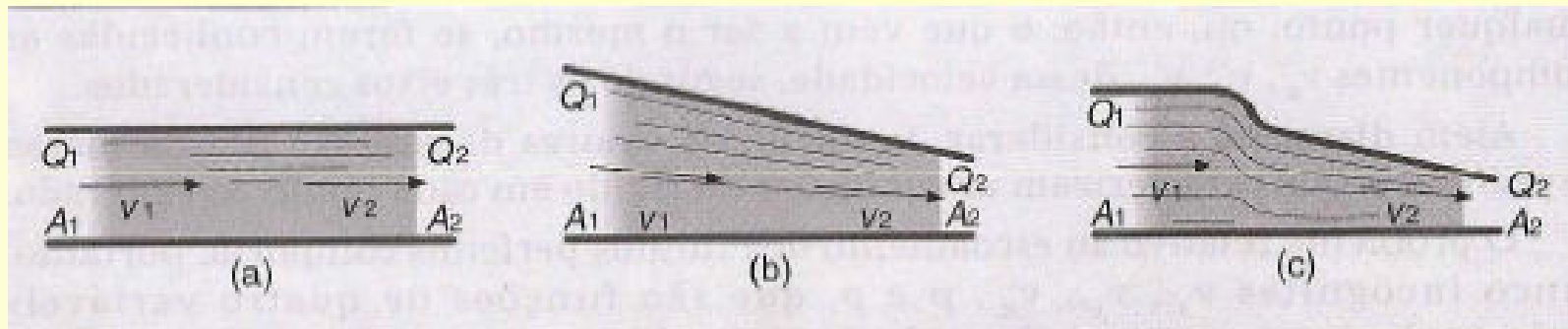
Classificação dos movimentos



A velocidade média permanece constante ao longo da corrente.

Classificação dos movimentos

Movimento	{ permanente não permanente	uniforme	{ acelerado retardado
		não uniforme	

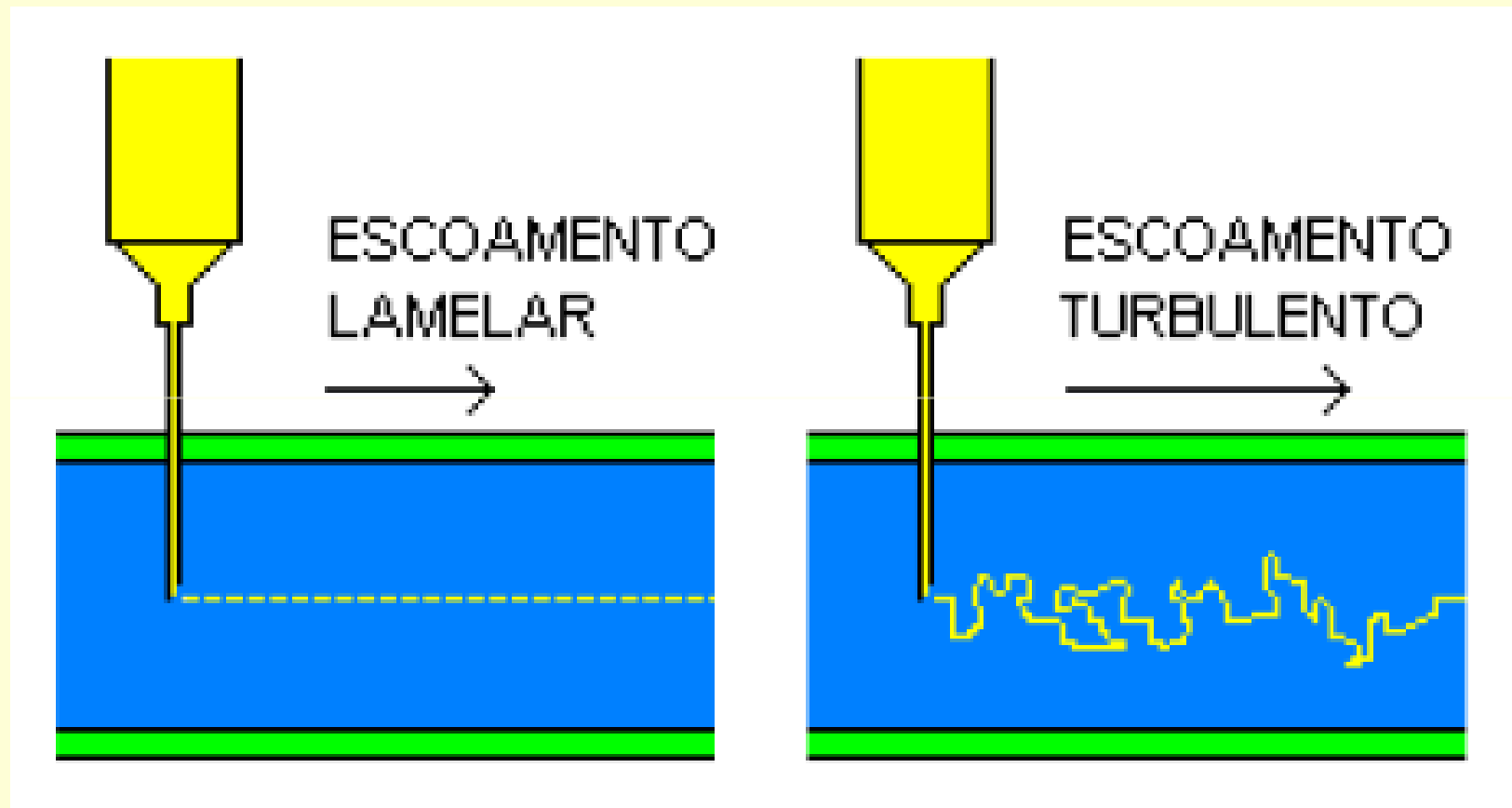


(a) Uniforme $Q_1 = Q_2$; $A_1 = A_2$; $v_1 = v_2$

(b) Acelerado $Q_1 = Q_2$; $A_1 \neq A_2$; $v_1 \neq v_2$

(c) Movimento não permanente $Q_1 \neq Q_2$; $A_1 \neq A_2$; $v_1 \neq v_2$

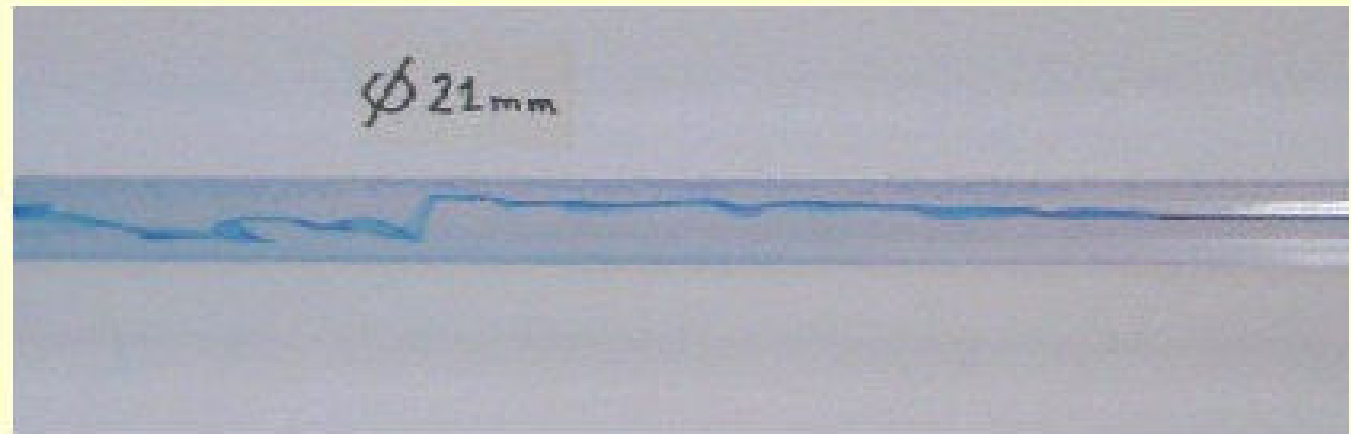
Regimes de escoamento



Experiência de Reynolds

Regimes de escoamento

**Fluxo em
regime
laminar**



**Fluxo em
regime
turbulento**



Regimes de escoamento

O estabelecimento do regime de escoamento depende do valor de uma expressão sem dimensões, denominado número de Reynolds (Re).

Na qual:

V = velocidade do fluido (m/s);

D = diâmetro da canalização (m);

ν = viscosidade cinemática (m²/s)

μ = viscosidade dinâmica (N s/m²)

ρ = massa específica (kg/m³).

$$Re = \frac{V.D}{\nu}$$

$$Re = \frac{\rho.V.D}{\mu}$$

Regimes de escoamento

$Re < 2.000 \rightarrow$ regime laminar

As partículas fluidas apresentam trajetórias bem definidas e não se cruzam;

$Re > 4.000$ regime turbulento

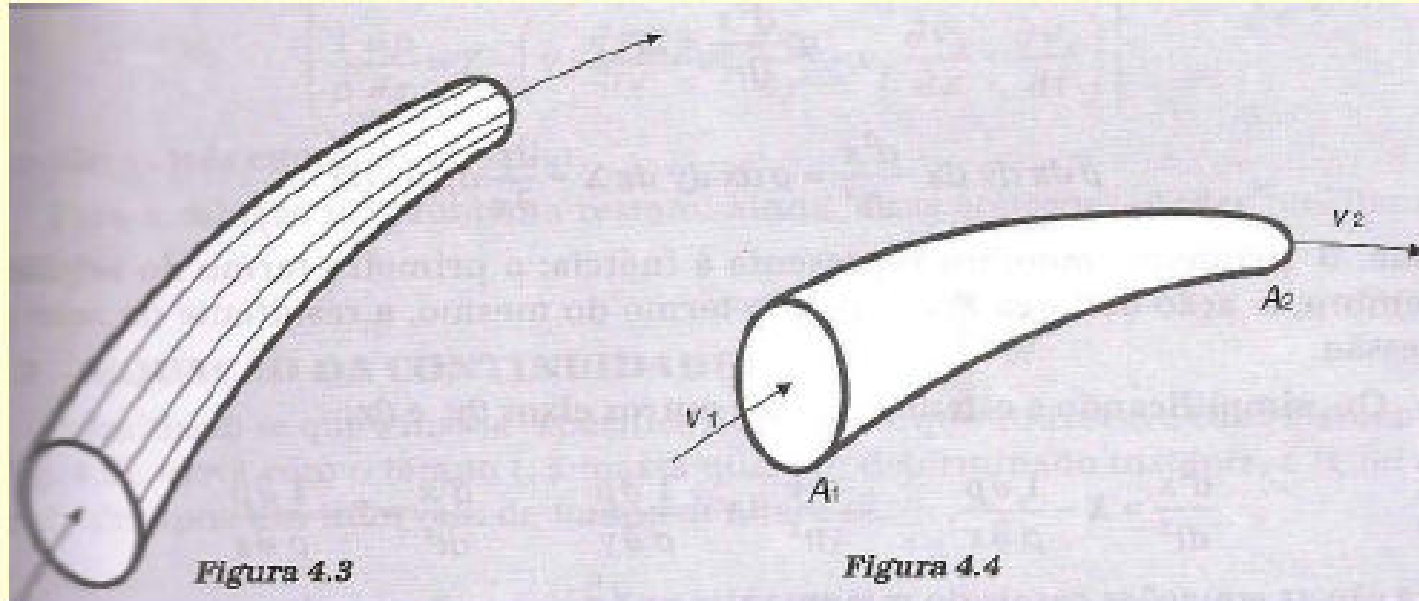
Movimento desordenado das partículas;

Entre esses dois valores encontra-se a denominada zona crítica.

Linha e tubo de corrente

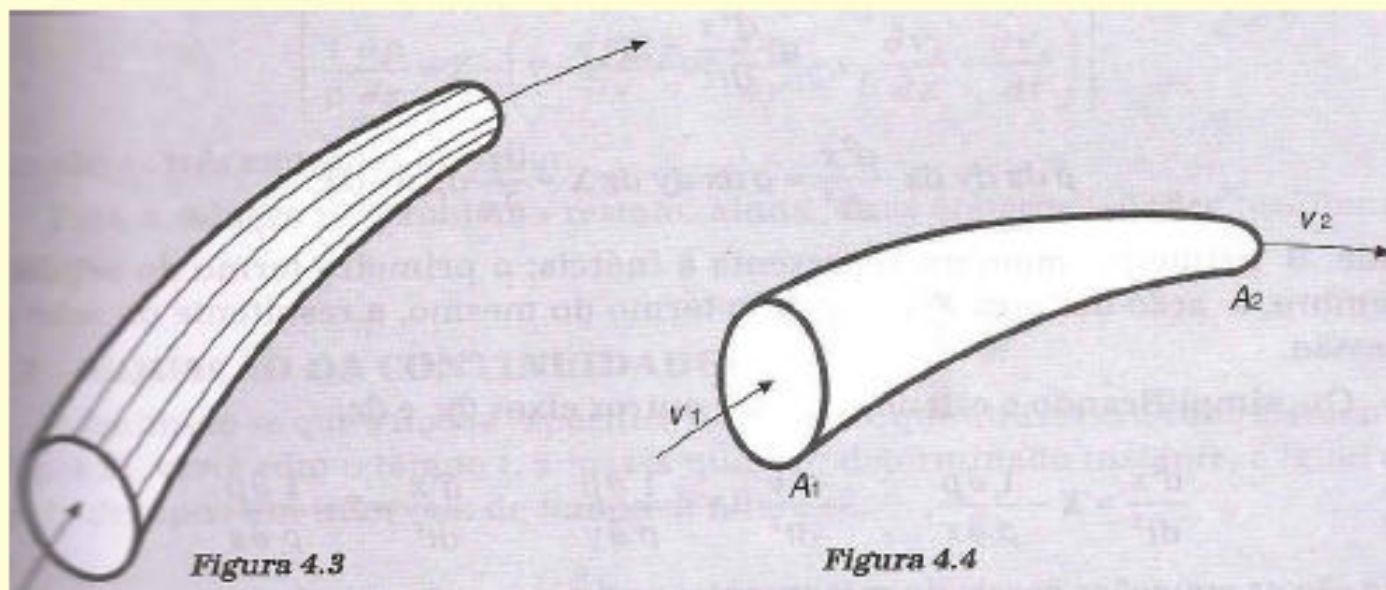
Uma linha de corrente é uma linha imaginária, contínua, tangente em todos os pontos aos vetores.

Considera-se linhas de correntes as linhas orientadas segundo a velocidade do líquido e que gozam da propriedade de não serem atravessadas por partículas do fluido.



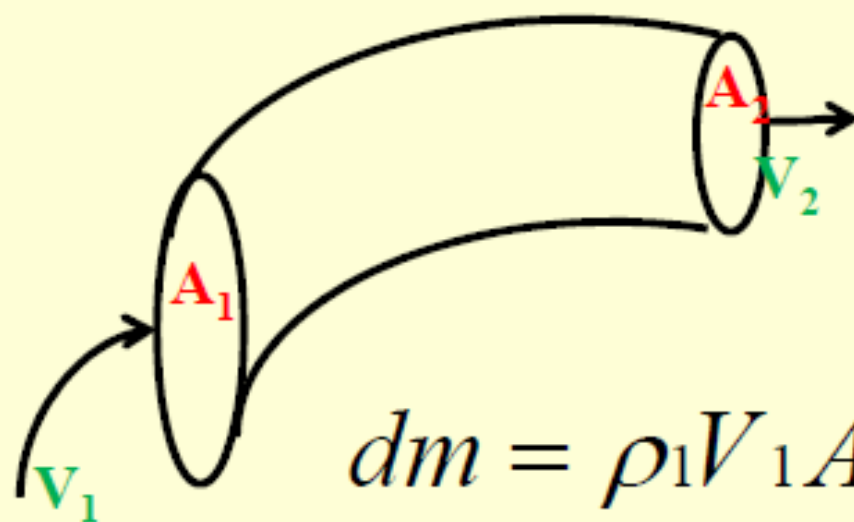
Linha e tubo de corrente

O tubo corrente é constituído por todas as linhas de corrente que passam por uma superfície fechada, e suas paredes podem ser consideradas impermeáveis.



Equação da continuidade

É fundamental para os estudos hidrodinâmicos.



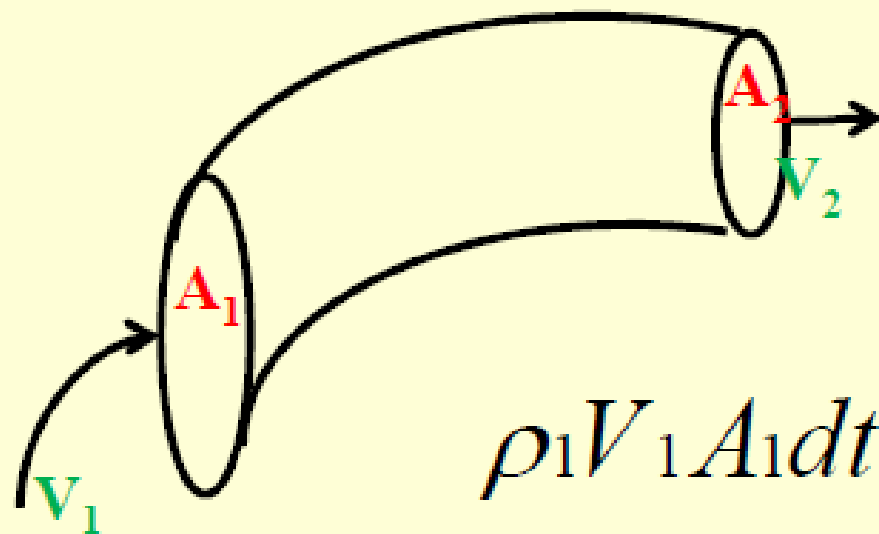
A variação de massa dm no interior do tubo de corrente, no intervalo de tempo dt , é igual à entre a massa de fluido que entra por A_1 e a que sai por A_2 . Assim:

$$dm = \rho_1 V_1 A_1 dt - \rho_2 V_2 A_2 dt$$

Considerando-se o fluxo

Equação da continuidade

É fundamental para os estudos hidrodinâmicos.



Considerando-se o fluxo permanente, a massa no interior do tubo corrente é invariável com o tempo ($dm/dt = 0$). Logo:

$$\rho_1 V_1 A_1 dt = \rho_2 V_2 A_2 dt$$

Como os líquidos podem ser considerados incompressíveis, a sua massa específica permanece constante ($\rho_1 = \rho_2$). Assim:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow \text{Equação da continuidade}$$

Equação da continuidade

É fundamental para os estudos hidrodinâmicos.

Generalizando-se a igualdade anterior, se tem:

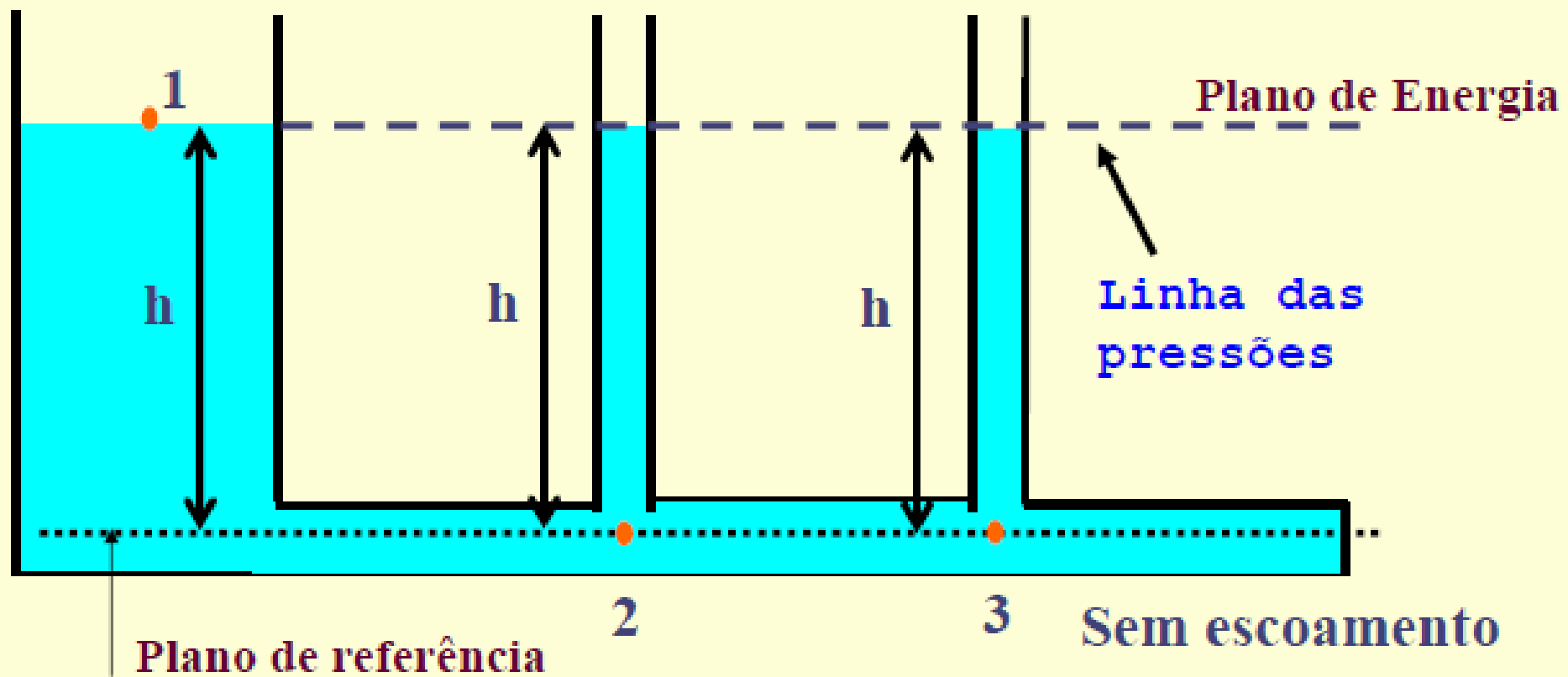
$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \dots = A_n V_n$$

onde Q = vazão (L^3);

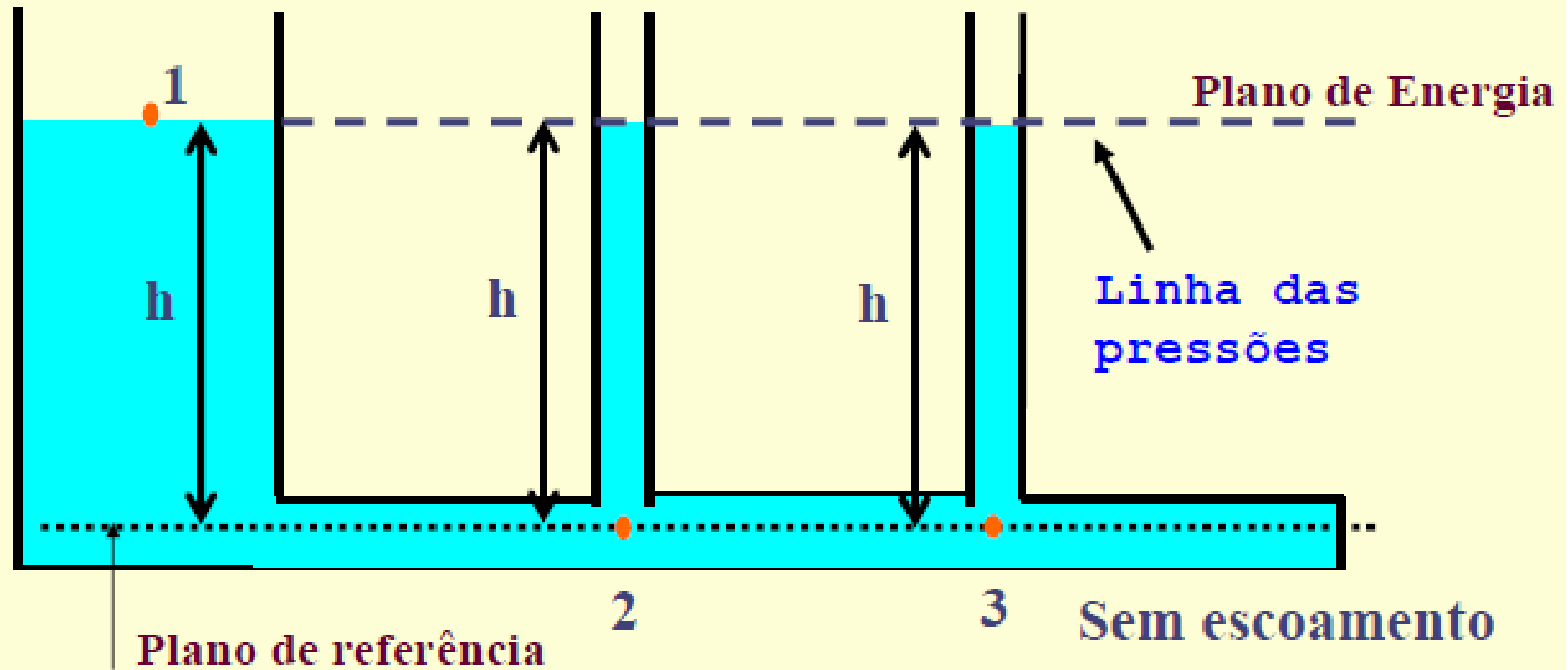
V = velocidade de escoamento ($L T^{-1}$);

A = área da seção de escoamento (L^2)

Pressão num sistema fechado (conduto forçado sem escoamento)



Pressão num sistema fechado (conduto forçado sem escoamento)



Energia Total da Água (H)

Energia potencial: posição (gravidade)
pressão

Energia cinética: **velocidade**

Unidades de medida de energia: Joule, Watt, cavalo-vapor, etc.

Há um modo prático de medir todos os componentes da energia da água em unidades de comprimento (metros ou metros de coluna de água).

Energia Total da Água (H)

Conhecendo a energia da água em um ponto, podemos:

- Calcular quanto trabalho poderá ser executado (roda d'água, escoamento por gravidade em tubulações ou canais, pequenas hidrelétricas, etc.);
- Calcular quanta energia teremos que acrescentar para usar a água em um local de nosso interesse (caixa d'água, bebedouros, aspersores).

1ª Componente - Energia potencial de posição (ψ_g)

$$\psi_g = (m.g).h = W.h$$

m é a massa da água (g);

g é a aceleração da gravidade (m/s^2);

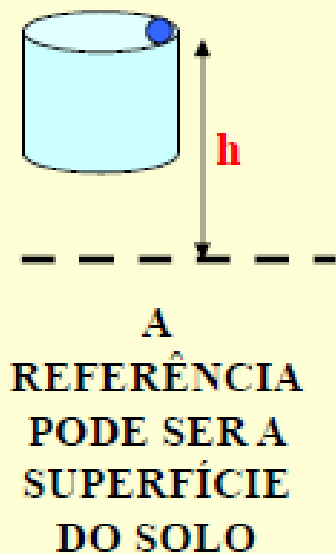
h é posição da massa de água em relação a um plano de referência (m).

W é o peso da massa de água (N/m^3);

Representando na forma de **energia por unidade de peso** de água, temos:

$$\psi_g = W.h / W = h$$

O valor da energia potencial de posição é igual à altura **h** entre o ponto considerado e o plano de referência (positivo acima, negativo abaixo).



2ª Componente – Energia de pressão (ψ_p)

Pressão da água (p): peso da água / área da base

$$\text{Peso da água} = V \cdot \gamma_{H_2O}$$

$$\text{Volume da coluna (V)} = A \cdot h$$

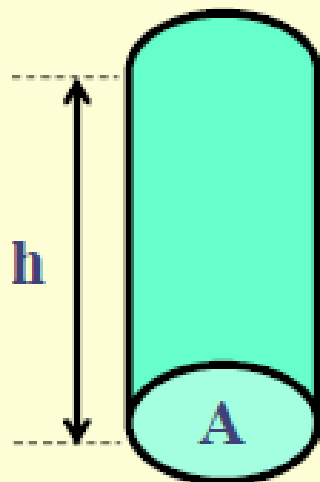
$$\text{Energia de pressão } (\psi_p) = A \cdot h \cdot \gamma_{H_2O} / A = h \cdot \gamma_{H_2O}$$

Representando na forma de energia por unidade de peso de água (ψ_p / γ_{H_2O}), temos:

$$\psi_p / \gamma_{H_2O} = h \cdot \gamma_{H_2O} / \gamma_{H_2O} = h$$

O valor da pressão num ponto no interior de um líquido, pode ser medido pela altura h entre p ponto considerado e a superfície deste líquido.

A unidade de medida é denominada metros de coluna de água (mH₂O).



3ª Componente – Energia cinética de velocidade

É a capacidade que a massa líquida possui de transformar sua velocidade em trabalho.

$$E_c = \frac{m.v^2}{2}$$

Representando na forma de energia por unidade de peso de água ($\gamma H_2O = m.g$), temos:

$$Ec = \frac{m.v^2}{2.m.g} = \frac{v^2}{2.g}$$

A energia de velocidade da água também pode ser representada por uma altura em **metros**.

$$\left(\frac{g.m^2/s^2}{g.m/s^2} \right) \quad \mathbf{m}$$

Energia Total da Água (H)

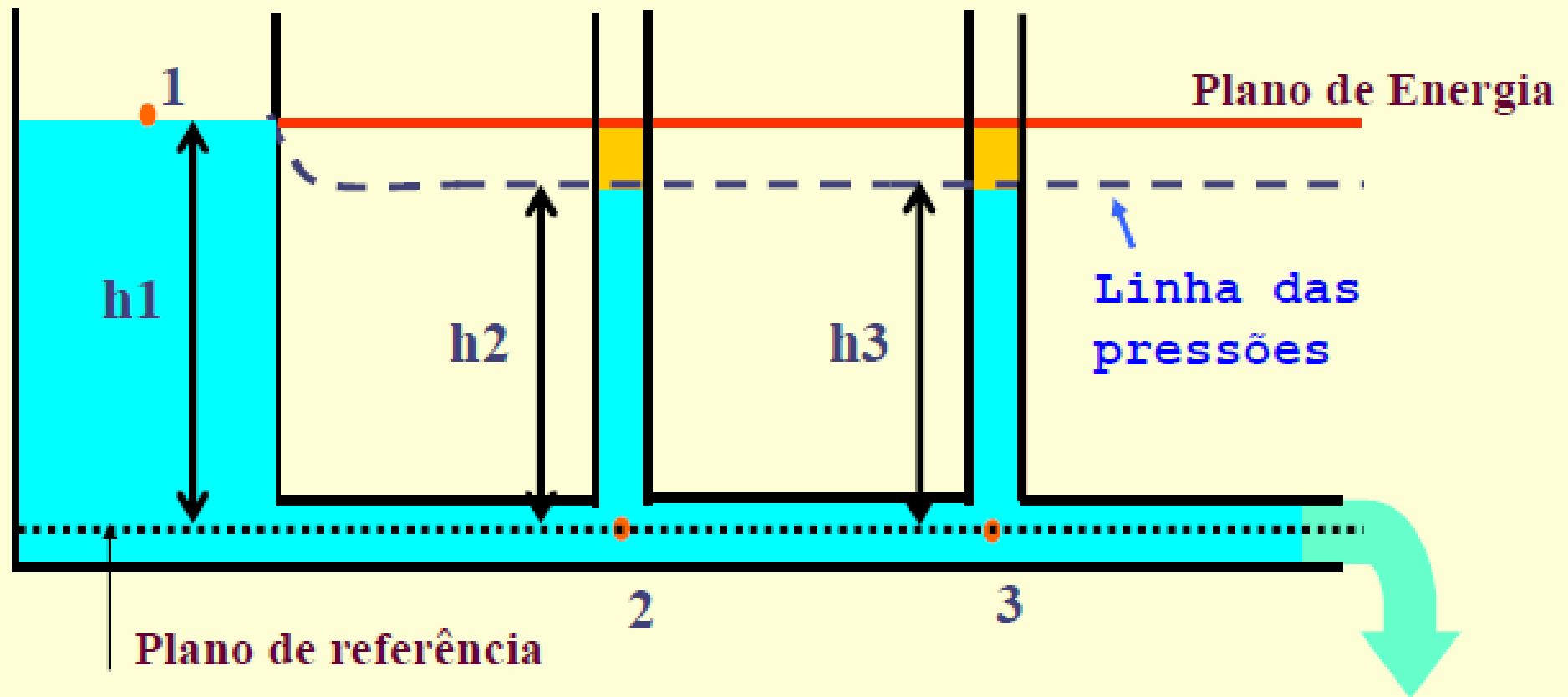
$$H = h \text{ (m)} + p/\gamma \text{ (mH}_2\text{O)} + v^2 / 2g \text{ (m)}$$

Equação de Bernoulli para líquidos perfeitos

No movimento em regime permanente, de uma partícula de um líquido perfeito, homogêneo e incompressível, a energia total da partícula é constante ao longo da trajetória.

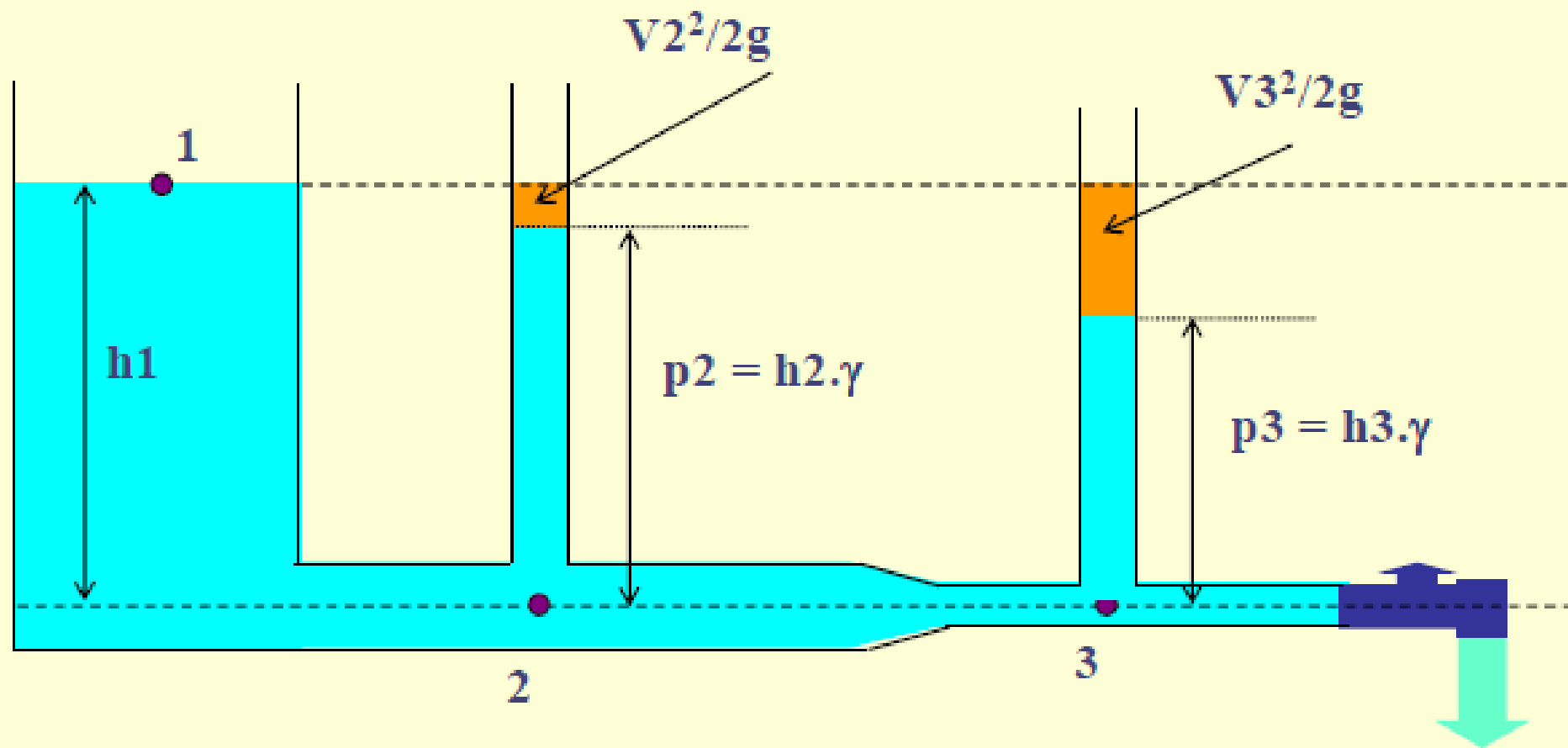
$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h = \text{CONSTANTE} \quad \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Energia Total da Água (H)



$$H_1 = H_2 = H_3 = \text{CONSTANTE}$$

Energia Total da Água (H)



$$H_1 = H_2 = H_3 = \text{CONSTANTE}$$

Casos Práticos

Na dedução do teorema de Bernoulli foram feitas várias hipóteses:

- a) O escoamento do líquido se faz sem atrito: não foi considerada a influência da viscosidade;
- b) O movimento é permanente;
- c) O escoamento se dá ao longo de um tubo de corrente (de dimensões infinitesimais);
- d) O líquido é incompressível.

Casos Práticos

Na dedução do teorema de Bernoulli foram feitas várias hipóteses:

A viscosidade e o atrito externos são os principais responsáveis pela diferença: em consequência das forças de atrito, o escoamento somente ocorre com uma perda de energia: a perda de carga (a energia se dissipa sob forma de calor).

Por isso se introduz na equação de Bernoulli um termo corretivo h_f (perda de carga)

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f$$

3.2 Vazão ou descarga (Q)

a) Definição: volume de líquido que atravessa uma seção de escoamento por unidade de tempo

$$Q = \text{Vol} / \Delta T$$

b) Unidades usuais:

MKS (SI): $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$

Unidades utilizadas na prática:

L/s

L/h

$\text{m}^3 \text{h}^{-1}$

gal/h (galões por hora)

3.3 Classificação dos movimentos de líquidos

Grandezas que caracterizam o escoamento: velocidade, pressão e densidade.

a) Movimento permanente: Velocidade, pressão e densidade constantes em um mesmo ponto, ao longo do tempo ($Q = \text{constante}$)

- Movimento permanente uniforme: velocidade média constante em diferentes seções de escoamento ao longo da corrente;
- Movimento permanente não uniforme: velocidade média varia nas diferentes seções de escoamento, ao longo da corrente. Pode ser ACELERADO ou RETARDADO.

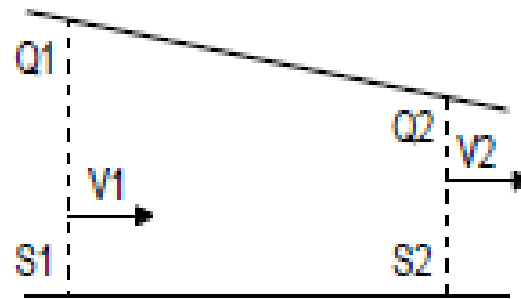


Uniforme

$$S_1 = S_2$$

$$V_1 = V_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

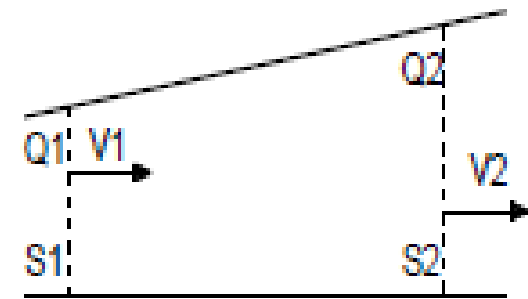


Acelerado

$$S_1 > S_2$$

$$V_1 < V_2$$

$$Q_1 = Q_2$$



Retardado

$$S_1 < S_2$$

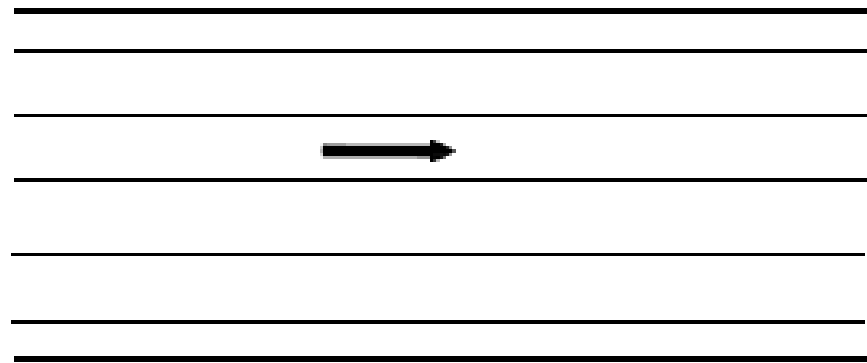
$$V_1 > V_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

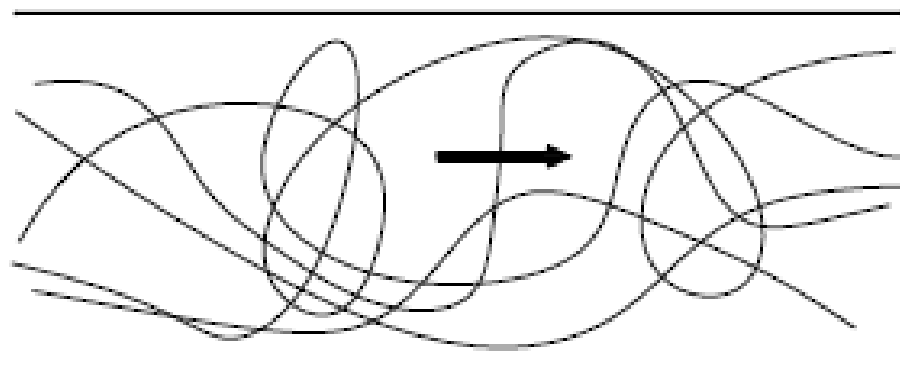
b) Movimento variado: Velocidade, pressão e densidade variam com o tempo.

3.4 Regimes de escoamento

a) Escoamento laminar (tranquilo ou lamelar): Trajetórias das partículas paralelas e bem definidas.



b) Escoamento turbulento: Trajetórias das partículas são desordenadas.



3.5 Equação da Continuidade

a) Definição: Em movimento permanente, a quantidade de massa que atravessa uma dada seção de escoamento é sempre a mesma.

- No escoamento de um líquido em movimento permanente, a vazão é o produto da velocidade de escoamento pela área da seção molhada.

$$Q = S \times V$$

3.5.1. Exemplos de aplicação:

a) Calcular a vazão que passa por um tubo com diâmetro de 4 polegadas e cuja velocidade do escoamento é de 2 m/s. (1 polegada = 2,54 cm ou 0,0254 m)

b) Calcular a velocidade de escoamento em um tubo de 10 cm de diâmetro, cuja vazão é igual a 50 m³/h.

3.6. Teorema de Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1738)

- Princípio da Conservação das Massas aplicado ao escoamento dos fluidos

Energia = capacidade de realizar trabalho

Energia = Força x Deslocamento

$$E = F \cdot L$$

3.6.1. Tipos de energia presentes no escoamento de fluidos

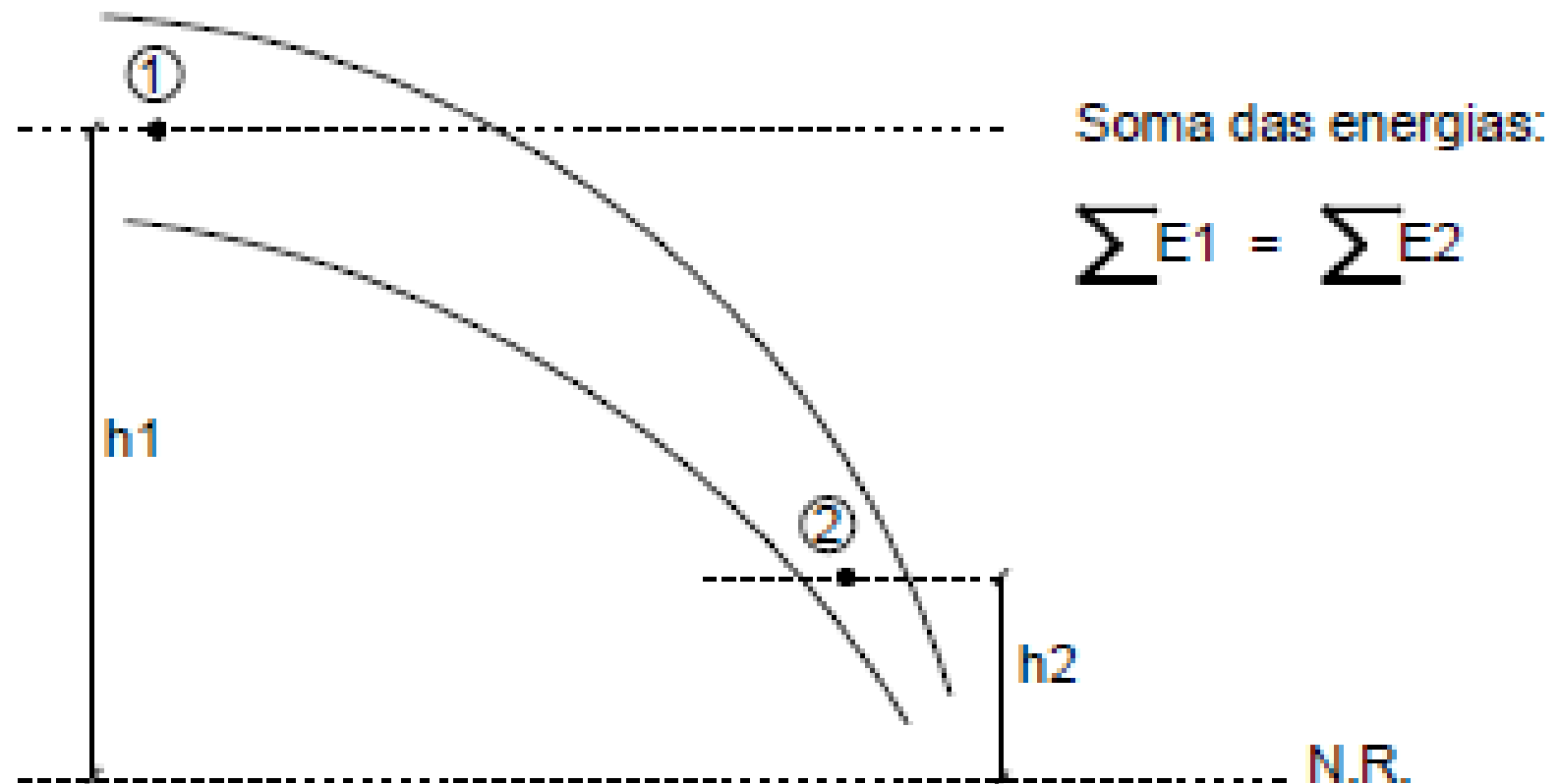
a) Energia cinética (E_c):
$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

b) Energia potencial (E_{pot}):
$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

c) Energia de pressão (E_p):
$$E_p = P \cdot Vol$$

3.6.2. Escoamento de um fluido perfeito

Fluido perfeito → Escoamento sem perda de energia



Simplificação do Teorema de Bernoulli:

$$\sum E = E_P + E_c + E_{pot}$$

$$\sum E_1 = \sum E_2$$

$$E_{P1} + E_{c1} + E_{pot1} = E_{P2} + E_{c2} + E_{pot2}$$

$$P_1 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m g h_1 = P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m g h_2$$

$$P_1 \cdot \textcircled{Vol} + \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m g h_1 = P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m g h_2$$

Massa específica: $\rho = \frac{m}{vol} \Rightarrow Vol = \frac{m}{\rho}$



Substituindo Vol por $\frac{m}{\rho}$:

$$P_1 \cdot \frac{m}{\rho} + \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m g h_1 = P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m g h_2$$

Dividindo todos os termos por $m \cdot g$:

$$\frac{P_1 \cdot \frac{m}{\rho} + \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m g h_1}{m \cdot g} = \frac{P_2 \cdot Vol + \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m g h_2}{m \cdot g}$$

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

Peso específico: $\gamma = \rho \cdot g$

Substituindo $\rho \cdot g$ por γ :

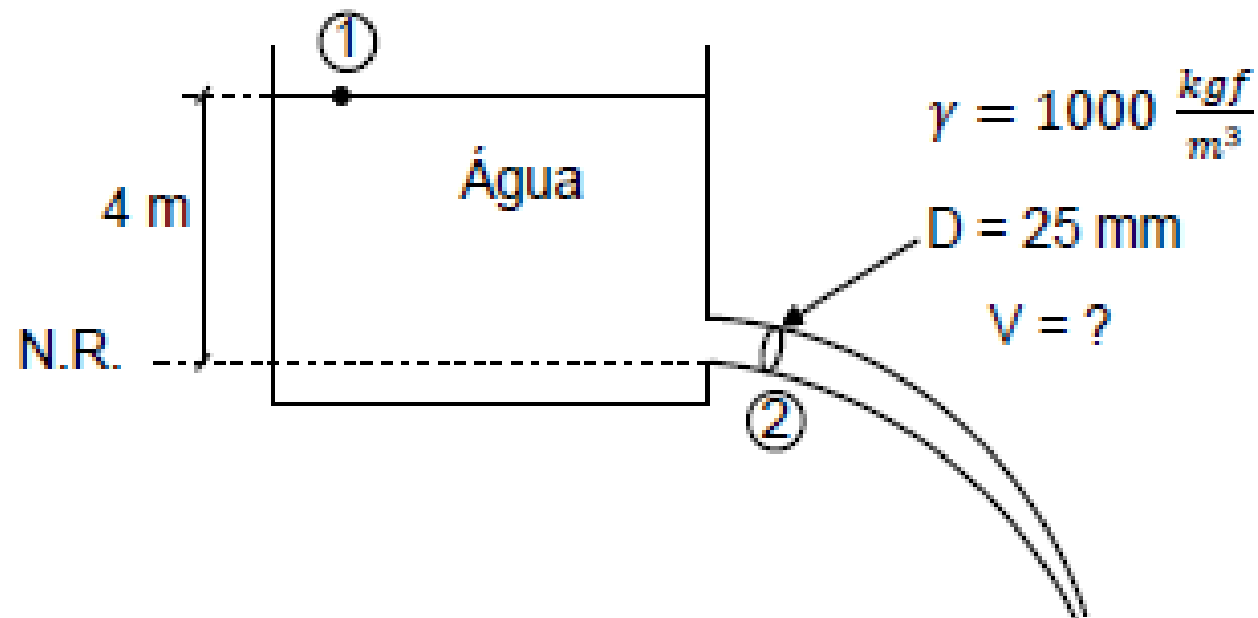
Teorema de Bernoulli aplicado ao fluido Perfeito

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2}$$

3.6.3 Aplicações do Teorema de Bernoulli

Exercícios

a) O esquema a seguir representa o escoamento de um fluido perfeito.



Pede-se:

- a.1) A velocidade do jato d'água;
- a.2) A vazão do escoamento.

Solução:

a.1) Cálculo da velocidade – Teorema de Bernoulli

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2$$

→ $\frac{P}{\gamma}$ é pressão relativa e o N.R. passa pelo ponto 2.

→ Nos pontos 1 e 2 a água está exposta à pressão atmosférica.

Portanto, pode-se simplificar para:

$$0 + 0 + h_1 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$$

$$0 + 0 + 4 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$$

$$V_2 = \sqrt{4 \cdot 2g} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 9,81}$$

$$V_2 = 8,86 \text{ m/s} \quad (\text{Resultado válido para o fluido perfeito})$$

Na prática: $V = 0,98 V_t$ (V_t = velocidade teórica)

$Q = 0,95 Q_t$ (Q_t = vazão teórica)

a.2) Cálculo da vazão – Equação da Continuidade

$$Q = V \cdot A \qquad A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \Rightarrow A = 0,000490873 \text{ m}^2$$

$$Q_t = 8,86 \times 0,000490873 = 0,00435 \text{ m}^3/\text{s}$$

- b) Calcular a pressão e a vazão no interior de um tubo com diâmetro $D = 25 \text{ mm}$ com um bocal circular de $D = 5 \text{ mm}$ em sua extremidade, sabendo que a velocidade do fluido medida no bocal é de 25 m/s .