

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA AGRÍCOLA

ENG 450 Estruturas e Edificações Rurais

Prof. Fernando da Costa Baêta Construções Rurais e Ambiência

> Edição: Júlio César de Melo Engenheiro Agrícola e Ambiental (31) 8425-5001

CARGAS ESTRUTURAIS

Estruturas, para o Engenheiro Agrícola, quer dizer Edificações, incluindo equipamentos e dependências dentro e em volta delas.

O Estudo estrutural começa com a determinação das cargas, durante o projeto, e tem como base os limites das cargas previstas.

O estudo estrutural inclui também a análise das propriedades, aplicações e usos dos materiais envolvidos. Na escolha dos materiais considera-se: tipo, classificação, custo e disponibilidade, associados com resistência, durabilidade, manutenção, aparência e facilidade de limpeza, entre outros.

Cargas permanentes, acidentais e devido ao vento.

As cargas que agem sobre as edificações rurais são, em geral, de um dos três tipos: permanentes, acidentais e devido ao vento. As cargas permanentes são aquelas correspondentes ao peso próprio dos elementos estruturais e por todas as sobrecargas fixas. As cargas acidentais são aquelas que podem atuar sobre a estrutura de edificações em função do seu uso (produtos, pessoas, veículos, equipamentos, etc.). As cargas devido ao vento dependem do clima.

Os valores de cargas acidentais considerados para edificações rurais podem diferir daqueles empregados para construções urbanas. Normalmente estes valores são menores por considerar o nível de importância do elemento abrigado - por exemplo, máquinas quando comparadas com alunos em uma escola.

A atuação das cargas em edificações rurais é complexa.

As cargas impostas pelos ventos dependem do local, altura, forma e inclinação dos telhados. As cargas acidentais recomendadas variam também com a vida útil e uso da estrutura, além de ter que considerar o risco de vidas humanas.

Todo elemento estrutural deve ser calculado e projetado para suportar uma das seguintes combinações de cargas:

- * Permanentes + acidentais,
- * Permanentes + acidentais + vento, ou
- * outra combinação necessária.

O quadro 1 apresenta o peso específico de diversos materiais que podem corresponder às cargas permanentes ou acidentais de edificações.

O quadro 2 apresenta as cargas e sobrecargas a serem consideradas nos diversos projetos.

QUADRO 1 Peso específico de vários produtos (kg/m³)

Produto	kg/m ³	Produto	kg/m ³
Ácido Carbônico (0º atm)	1,980	Cloro	1 330
Ácido clorídrico(15 ⁰ , 40 ⁰)	1 190	Cobre fundido	8 800
	1.520	Corda	1 160 - 1 950
Ácido nítrico (15 ⁰) Ácido sulfuroso (líq.)	1 490	Cortiça	240
Açúcar branco	1 610	Couro seco	860
, and the second	1 000	Escória de alto forno	2 500 - 3 000
Água destilada (4 ⁰)			
Alcatrão	1 200	Estanho fundido	7 260
Álcool etílico (150)	790	Farinha de trigo	430 - 470
Alumínio laminado	2 700 - 2 750	Ferro comum	7 800
Alvaiade	6 700	Gasolina (15 ^o)	800 - 850
Alvenaria de tijolo fresca	1 570 - 1 700	Gelo	880 - 920
Alvenaria de tijolo seca	1 420 - 1 550	Gesso calcinado	1 810
Amianto (asbesto)	2 800	Gesso peneirado	1 250
Amianto papelão	1 200	Grafite	1 900 - 2 300
Amido	1 530	Granito	2 510 - 3 050
Angico	960 - 850	Graxa	920 - 940
Antimônio	6 700	Hidrogênio (0° atm.)	0,089
Ar (0° atm)	1,29	Imbuía	650
Ardósia	2 630 - 2 670	Ipê	1 030 - 960
Areia fina seca	1 400 - 1 650	Jacarandá	910 - 720
Areia fina úmida	1 900 - 2 050	Jatobá	1 020 - 850
Areia grossa	1 400 - 1 500	Lã de carneiro	1 320
Argamassa	2 100 - 2 500	Latão	8 400 - 8 700
Argila seca	2 000 - 2 250	Manganês	7 150 - 8 300
Argila úmida	2 600	Manteiga	970 - 950
Aroeira do sertão	1 210 - 1 160	Mármore comum	2 520 - 2 850
Arroz	770 - 850	Milho em grão	700 - 800
Asfalto	1 100 - 1 330	Neve	125
Aveia	360 - 560	Níquel	8 400 - 8 650
Azeite	840 - 941	Nitrato do Chile	2 260
Barro	1 700 - 2 800	Óleo de algodão (150)	920
Batata	1 060 - 1 130	Osso	1 800
Benzina (0 ⁰)	900	Ouro laminado	19 300 -19 350
Borracha	920 - 960	Palha (em feixe)	60 - 70
Bronze(8 a 14% estanho)	7 400 - 3 900	Papel	700 - 1 150
Cabriúva	980 - 870	Parafina	870 - 910
Cálcio	1 500	Parede de pedra	2 030 - 2 450
Cal hidratada	1 150 - 1 250	Parede de tijolos cheios	1 500 - 1 650
Cal virgem	900 - 1 300	Parede de tijolos furados	1 050 - 1 100
Carvão de lenha branca	135 - 180	Pedra calcária	2 460 - 2 650
Carvão fóssil	1 200 - 1 500	Peroba	870 - 720
Caulim	2 200	Pinho brasileiro	610 - 520
Cedro	580 - 420	Prata laminada	10 500 -10 600
Centeio	680 - 790	Salitre	1 990 - 2 030
Cera	965 - 970	Terra argilosa seca	1 700 - 2 000
Cerveja	1 020 - 1 040	Tijolo comum	1 400 - 1 550
Chumbo	11 250 -11 370	Trigo	700 - 830
Cimento em pó	1 450 - 1 750	Vidro de janela	2 400 - 2 600
Cloreto de cálcio	2 200 - 2 240	Zinco laminado	7 130 - 7 200

QUADRO 2 Cargas e sobrecargas para edificações rurais.

Descrição	Cargas kgf/m²	Sobrecargas kgf/m²
Bovinos adultos	500	-
Bezerros	290	-
Caprinos e ovinos	240	-
Suínos com até 90 kg	250	-
Suínos com até 220 kg	340	-
Equinos	500	-
Perus	140	-
Galinhas e frangos de corte	100	-
Estufas	250	-
Residências rurais	200	-
Casas de máquinas	750	-
Cozinhas não residencial	300	-
Escolas rurais	300	-
Escritórios	200	-
Garagens e estacionamentos	300	-
Laboratórios	300	-
Telhado colonial	140	60
Telhado com telhas francesas	125	60
Telhado com telhas de fibrocimento	90	60
Laje de forro	120	100
Laje de piso	180	200 - 600
Revestimento de forro	50	-
Pisos sobre base de concreto	50 - 80	-
Revestimentos de paredes	25	-

AÇÃO DO VENTO NAS EDIFICAÇÕES

1 - Introdução

A NBR-6123 tem por objetivo fixar condições que se exigem quando da consideração das forças devidas à ação do vento, visando ao cálculo das várias partes que compõem uma edificação.

Convém relembrar que para o estudo das forças do vento é necessário, fundamentalmente, o conhecimento de três parâmetros:

- pressão de obstrução: depende essencialmente da velocidade do vento (V), numericamente igual a:

$$q = \frac{(V_k)^2}{16}$$

q em kgf/ m^2 , quando V_k em m/s.

- coeficiente de pressão: depende da geometria do edifício, algebricamente igual a:

$$Cp = Cpe - Cpi$$

(fornece a pressão num certo ponto, quando multiplicado pela pressão de obstrução).

- coeficiente de forma: se refere a um certo ponto, enquanto o coeficiente de forma dá os valores médios em superfícies planas.

$$C = Ce - Ci$$

2 - Procedimentos para cálculo

O item 3 da NBR-6123 diz textualmente: As forças devidas ao vento sobre uma edificação devem ser calculadas separadamente para:

- a) elementos de vedação e suas fixações (telhas, vidros, esquadrias, painéis de vedação, etc.);
 - b) partes de estrutura (telhados, paredes, etc.);
 - c) a estrutura como um todo.

As forças devidas ao vento são determinadas a partir dos seguintes parâmetros:

- velocidade básica do vento (Vo), adequada ao local onde a estrutura será construída.

Essa velocidade básica (Vo) deve ser multiplicada pelos fatores S1, S2 e S3 para ser obtida a velocidade característica do vento (Vk). Assim tem-se simbolicamente:

 S_1 = fator topográfico

 S_2 = fator de rugosidade do terreno

 S_3 = fator estatístico

- pressão de obstrução (q), determinada a partir da velocidade característica (V_k) , pela fórmula (1) indicada no item anterior, onde:

$$V_k = Vo.S_1.S_2.S_3$$

- coeficiente de pressão e de forma, determinados experimentalmente e disponíveis na literatura. Desta forma, o esforço imposto pelo vento na estrutura ou parte dela é dado por:

$$q_{final} = Cp.q$$

3 - Velocidade básica do vento: Vo

De acordo com a NBR-6123, a velocidade básica do vento Vo (em m/s) pode ser obtida no mapa do Brasil, onde se encontram as isopletas correspondentes (veja próxima figura).

Definimo-la como sendo "a velocidade de uma rajada de 3 segundos, exercida, em média, uma vez em 50 anos, a 10 m acima do terreno, em campo aberto e plano".

Poder-se-ia dizer também que período médio de retorno dessa velocidade é de 50 anos, significando que em 100 períodos de 50 anos (5.000 anos) 63 dos períodos apresentarão uma velocidade máxima média anual superior ao valor fixado.

4 - Fatores Intervenientes

4.1 - Fator Topográfico S₁

Este fator leva em consideração as grandes variações locais na superfície do terreno, ou seja, acelerações encontradas perto de colinas, proteções conferidas por vales profundos, bem como os efeitos de afunilamento em vales. Lembramos que esses efeitos não foram levados em conta quanto da leitura do mapa das isopletas.

A tabela I nos dá os valores a serem usados.

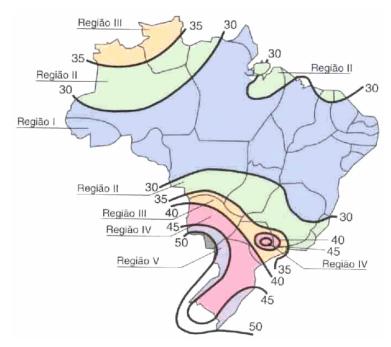


Tabela I Fator topográfico, "S"

Caso	Topografia	s_1
a	Todos os casos, exceto os seguintes:	1,0
b	Encostas e cristais de morros em que ocorre aceleração do vento. Vales com efeito de afunilamento	1,1
С	Vales profundos, protegidos de todo os ventos	0,9

4.2 - Fator de rugosidade S₂

Este fator considera o efeito combinado da rugosidade do terreno, da variação da velocidade do vento com altura acima do terreno (lembrar que Vo está relacionado com a altura do anemômetro a 10m) e das dimensões da edificação. Para edificios muito grandes, o intervalo de duração das rajadas deve ser maior.

A NBR-6123 classifica os terrenos em quatro categorias, no que diz respeito à rugosidade. A fim de levar em conta - como dissemos anteriormente - o tamanho das edificações, como consequência, o intervalo de duração das rajadas necessárias para perturbar todo o campo aerodinâmico do edificio, a NBR-6123 escolheu três classes de edificações e de seus elementos:

- Classe A: duração das rajadas 3 segundos; aplicável a todas as unidades de vedação, seus elementos de fixação e peças individuais de estruturas sem vedação;
- Classe B: duração das rajadas 5 segundos, todas as edificações nas quais a maior dimensão não exceda 50 m;
- Classe C: duração das rajadas 15 segundos, todas as edificações nas quais a maior dimensão exceda 50 m.

A Tabela II nos dá, de uma forma agrupada, as classificações anteriores com a altura do edificio sobre o terreno.

Tabela II Fator "S₂"

	Categorias de rugosidade do terreno					
Altura acima	Terreno aberto, sem obstruções, zonas	Terreno aberto, com poucas obstruções, granjas, casas de	Terreno com muitas obstruções, pequenas cidades, subúrbios de	Terreno com grandes e freqüentes obstruções, centros		
do terreno	costeiras, pradarias	campo	grandes cidades	de grandes cidades		
H (m)	Rugosidade 1	Rugosidade 2	Rugosidade 3	Rugosidade 4		
		Classe				
	A B C	A B C	A B C	A B C		
3	0,83 0,78 0,73	0,72 0,67 0,63	0,64 0,60 0,55	0,56 0,52 0,47		
5	0,88 0,83 0,78	0,79 0,74 0,70	0,70 0,65 0,60	0,60 0,55 0,50		
10	1,00 0,95 0,90	0,93 0,88 0,83	0,78 0,74 0,69	0,67 0,62 0,58		
15	1,03 0,99 0,94	1,00 0,95 0,91	0,88 0,83 0,78	0,74 0,69 0,64		
20	1,06 1,01 0,96	1,03 0,98 0,94	0,95 0,90 0,85	0,79 0,75 0,70		
30	1,09 1,05 1,00	1,07 1,03 0,98	1,01 0,97 0,92	0,90 0,85 0,79		
40	1,12 1,08 1,03	1,10 1,03 1,01	1,05 1,01 0,96	0,97 0,93 0,89		
50	1,14 1,10 1,05	1,12 1,08 1,04	1,08 1,04 1,00	1,02 0,98 0,94		
60	1,15 1,12 1,08	1,14 1,10 1,06	1,10 1,06 1,02	1,05 1,02 0,98		
80	1,18 1,15 1,11	1,17 1,13 1,09	1,13 1,10 1,06	1,10 1,07 1,03		
100	1,20 1,17 1,13	1,19 1,16 1,12	1,16 1,12 1,09	1,13 1,10 1,07		

4.3 - Fator estatístico S₃

Pelo menos teoricamente existiriam diversas maneiras de se calcular a probabilidade de um determinado vento ser excedido durante um determinado período.

Para tanto, são usadas as distribuições denominadas de extremos, sendo que a NBR-6123 adota a de Fishet-Tippett II ou de Frechet, matematicamente:

$$F_{V}(V) = \Pr ob[V < V] = e^{-\left(\frac{V}{\beta}\right)^{-\delta}}$$

onde o parâmetro β denomina-se fator de velocidade característica, dependendo então da região, e o parâmetro δ denomina-se fator único de forma e igual a 6,369.

Todavia, cumpre salientar que é impossível afirmar, categoricamente, que um dado valor da velocidade não será excedido. A Tabela III indica os mínimos valores do fato S3 que podem ser usados.

A NBR-6123 também permite lançar mão de coeficientes de correção do fator S3 quando se deseja alterar o período médio de recorrência ou adotar níveis de probabilidades diferentes de ocorrência, que podem variar de 10% a 90%.

Tabela III Fator "S₃"

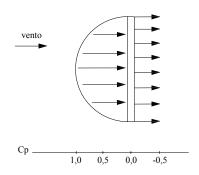
Grupo	Descrição	S ₃
1	Edificações cuja ruína total ou parcial pode afetar a segurança ou possibilidade de socorro a pessoas após uma tempestade destrutiva (hospitais, quartéis de bombeiros e de forças de segurança, centrais de comunicações, etc.).	1,10
2	Edificações para hotéis e residências. Edificações para comércio e indústria com alto fator de ocupação.	1,00
3	Edificações e instalações industriais com baixo fator de ocupação (depósitos, silos, construções rurais, etc.).	0,95
4	Vedações (telhas, vidros, painéis de vedação, etc.).	0,88
5	Edificações temporárias e estruturas dos grupos 1 a 3 durante a construção.	0,83

5 - Coeficientes aerodinâmicos

A incidência do vento sobre uma edificação, devido a sua natureza, provoca pressões ou sucções nos elementos da mesma, sendo que a intensidade destes esforços depende da forma e proporção da construção, bem como da localização das aberturas.

O exemplo mais simples é aquele do vento atingindo perpendicularmente uma placa plana, conforme figura 2, na qual na face a barlavento o coeficiente de pressão na zona central chega a +1,0, decrescendo até as bordas, e é constante, e igual a 0,5, na face a sotavento. Assim sendo, esta placa estaria sujeita a uma pressão total, na zona central, de cp = 1,5 = +1,0 - (-0,5).

Assim sendo, as normas nada mais fazem do que apresentar tabelas e gráficos dessas pressões ou sucções, mediante os denominados coeficientes de pressão, tanto externos, Cpe, quanto internos, Cpi; e de coeficientes de forma, Ce e Ci, externos e internos, respectivamente, existindo então diversas tabelas.



Em valores numéricos a pressão normal que age na placa é obtida por:

$$q_t = q.Cp = 1.5q$$

A tabela a seguir apresenta valores de Cp para diversas edificações rurais.

Tabela IV Coeficiente de pressão, C_p, para edificações rurais

Sentido do vento		lavento		Sotavento		
\rightarrow	Parede	Telhado	Telhado	Parede	Fundo ou paredes laterais	
Duas águas						
THE W.	+0,7	de +0,2(30°) a -0,7(10°)	-0,7	-0,5	-0,7	
†	+0,7	-0,7	-0,7	-0,5	-0,5	
Duas águas com uma lateral aberta						
	-	-0,9	-1,2	-1,1	-1,4	
	+1,3	+0,2	-0,2	-	-0,3	
Uma água		_				
	+0,7	-	-0,7	-0,7	-0,8	
	+0,6	0	-	-0,6	-0,9	
<u> </u>	+0,7	-0,7	-	-0,4	-0,6	

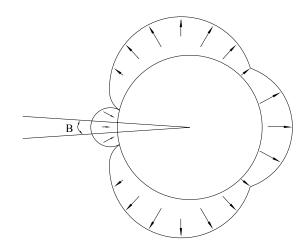
continuação...

Sentido do vento	Barlav	vento	Sotar	vento	Fundo ou	
\rightarrow	Parede	Telhado	Telhado	Parede	paredes laterais	
Uma água com uma abertura lateral						
	-	-	-1,3	-1,3	-1,3	
	+1,1	+0,5	-	-	-0,4	
Coberta						
	-	+0,6	-0,6	1	-	
H 0,8H	-	-1,0	-1,1	-	-	

Cobertura em arco	Parede a barlavento	Primeiro quarto da cobertura a barlavento	Centro da cobertura e primeiro quarto da cobertura a sotavento	Parede a sotavento	Paredes laterais
∏h W ——I	+0,8	$+2^{h/w}-0,4$	-0,7	-0,5	-0,7
W W	-	+1,2 ^{h/w}	-0,7	-	-0,7

^{*} Os coeficientes listados são a soma vetorial da pressão externa e interna. Coeficientes positivos correspondem à pressão propriamente dita, e negativos, à sucção.

A tabela a seguir apresenta valores de cp, ao redor de um silo ou tanque vertical (altura/diâmetro < 5). Considerando a direção do vento, da esquerda para a direita, e o ângulo formado entre esta direção e a do ponto ao redor do silo ou tanque em que se deseja saber, pode-se verificar se há pressão ou sucção e a intensidade deste esforço.



Ângulo B	Cp local
0°	+1,0
15°	+0,8
30°	+0,1
45°	-0,8
60°	-1,5
75°	-1,9
90°	-1,9
105°	-1,5
120°	-0,8
135°	-0,6
150°	-0,5
165 ⁰	-0,5
180°	-0,5

A tabela a seguir apresenta os coeficientes de pressão, Cp, para serem utilizados quando do dimensionamento de elementos estruturais específicos e para beirais (com 90 cm ou 10% do vão).

Tabela V Coeficientes de pressão, Cp, para elementos estruturais isolados e beirais.

Localização dos elementos	Edificações fechadas	Edificações abertas
Parede	+0,9 e -1,0	+0,9 e -1,5
Telhado	-1,0	-1.5
Beirais e Cumeeira	-2,2	-2,2

A tabela a seguir apresenta os coeficientes de pressão, Cp, para construções de vários tipos.

Tabela VI Coeficiente de pressão, Cp, para construções de vários tipos.

Estrutura ou parte dela	Descrição	Ср
Silos, tanques e chaminés	quadrados	1,3 em qualquer direção
Silos, tanques e chammes	circulares	0,6 em qualquer direção
Postes de luz, de sinalização e mastros para bandeiras	qualquer forma	1,4 em qualquer direção
Cercas, muros e outras elementos planos 1,7 em qualquer direc		1,7 em qualquer direção
divisórias	elementos circulares	0,9 em qualquer direção

Aplicação:

Determine as pressões, devidas ao vento, que agem em um armazém de pé direito de 5m, inclinação do telhado de 30° e beirais de 0,8m, localizado em um vale da região de Viçosa.

$$q = \frac{(V_k)^2}{16}$$
 $V_k = Vo.S_1.S_2.S_3$

Vo = 30m/s (gráfico das isopletas),

 $S_1 = 0.90$ (fator topográfico)

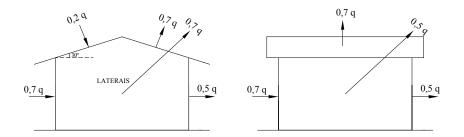
 $S_2=0.88$ (fator de rugosidade para h=7.0m, terreno aberto com poucas obstruções, classe B) e

 $S_3 = 0.95$ (fator estatístico, grupo 3).

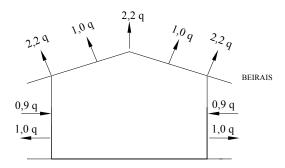
Então:

$$q = \frac{(30.0,9.0,88.0,95)^2}{16} = 31,8 \text{Kgf} / \text{m}^2$$

Coeficientes de pressão a serem utilizados em cálculos estruturais que envolvem a construção com um todo:



Coeficientes de pressão a serem utilizados em cálculos de elementos estruturais específicos (pilares, travessas, terças, cumeeiras, etc.).



Obs: Em qualquer dimensionamento, o vento deve ser considerado atuando em todos os sentidos, e considerado o Cp de maior influência tanto para pressão como sucção.

Problemas Propostos

- 1 Que carga, por unidade de seção horizontal, devido à ação do vento, deve ser considerada nos cálculos das tesouras de uma coberta com 3m de pé direito e 30º de inclinação para construção no Triângulo Mineiro?
- 2 Para uma residência, localizada em uma encosta da região de Viçosa, coberta com telhas pré-moldados de argamassa de cimento e areia, com dimensões de 24 cm x 34 cm, qual deve ser a massa de cada unidade para que não seja levantada pelo vento?
- 3 Qual deve ser a resistência à tração apresentada pelos fixadores de cobertura de cimento-amianto com telhas de 1,10m x 1,83m para a coberta do problema 1?
- 4 Qual deve ser o esforço horizontal, devido ao vento, considerado aplicado à meia altura de um poste de eletrificação, com diâmetro de 30 cm e 10 m de altura, para que o mesmo resista à flexão?

CARGAS NOS SILOS PARA SILAGEM E BATATA

1 - Silagem:

A Associação Nacional de Silos (NSA) recomenda uma densidade de fluido equivalente (DFE) de 320 kg/m3 para projetos de silos contendo silagem de milho de 68% a 72% de umidade. A pressão lateral pode ser calculada também pela fórmula de Rankine:

$$L = w.h.tg^2 \left(45^{\circ} - \frac{\phi}{2} \right)$$
 Eq. 1

onde:

L = pressão lateral, kgf/m²

w = densidade da silagem, kg/m³

H = profundidade da silagem, m, e

φ = ângulo de atrito interno (repouso)

A NSA recomenda ainda que a densidade máxima de 1041 kg/m3 e o ângulo mínimo de atrito de 32º sejam usados na equação 1 para obter uma DFE de 320 kg/m3. Uma DFE menor, 288 kg/m3, foi proposta por Curtis e Stanek, no relatório da ASAE de 1979-4584.

A carga vertical transmitida à parede, devido ao atrito, por metro quadrado, Vw, em kgf/m2, é estimada por:

$$V_{W} = 96,88.h^{1,08}$$
 Eq. 2

A carga vertical acumulada, a uma dada profundidade h, Vt em kgf/m de circunferência da parede, devida ao peso da massa ensilada equilibrada por atrito é dado por:

$$V_t = 46.5 \cdot h^{2.08}$$
 Eq. 3

A carga vertical que atua sobre o fundo do silo, Vf, em kgf, pode ser calculada por:

$$V_f = \pi.r(w.h.r - 2V_t)$$
 Eq. 4

As paredes dos silos devem ser dimensionadas de forma a suportarem a pressão lateral, L, e suportarem a compressão o peso próprio do silo e dos equipamentos instalados, mais a carga vertical absorvida pela parede devido à silagem.

O piso dos silos deve ser calculado de forma a suportarem o restante do peso da silagem que não foi transmitido às paredes, prevendo que esta carga pode aumentar em até 30% durante a descarga.

As fundações dos silos devem ser dimensionadas para suportarem o peso próprio dos silos, o peso dos equipamentos, o peso da massa ensilada e no fundo, assumindo que estes estão apoiados nas mesmas.

Aplicação:

Considerando um silo para forragem com 6 m de altura acima do solo e 3 m de diâmetro, determinar:

- a) as pressões laterais a 0, 2, 4 e 6 m de profundidade;
- b) a carga de compressão das paredes nas profundidades de 3 e 6 m;
- c) a carga transmitida pela silagem sobre o fundo;
- d) o número de barras de ferro CA-60 com diâmetro 6 mm a serem distribuídas nos intervalos de 0-2 m, 2-4 m e 4-6 m; e verificar se a alvenaria de tijolos maciços, σ_{adm} = 6 kgf/cm2, com 25 cm de espessura é capaz de suportar os esforços de compressão a 6 m de profundidade.

Resolução

a) pela fórmula de Rankine, considerando w = 1.041 kg/m3 e ϕ = 32°; tem-se:

$$L = 1041. \text{h.tg}^{2} \left(45^{\circ} - \frac{32^{\circ}}{2} \right) = 320. \text{h}$$

$$L_{0} = 0;$$

$$L_{2} = 640 \text{ kgf/m}^{2}$$

$$L_{4} = 1280 \text{ kgf/m}^{2} \text{ e}$$

$$L_{6} = 1920 \text{ kgf/m}^{2}$$

- pela densidade de fluido equivalente (DFE), L = 320.h, o que dará os mesmos resultados.

b)
$$V_t = 46.5 \cdot h^{2.08}$$

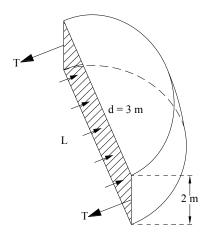
$$V_{t3} = 46.5 \cdot 3^{2.08} = 457 \text{ kgf/m de parede e}$$

$$V_{t6} = 46.5 \cdot 6^{2.08} = 1932 \text{ kgf/m de parede}$$

c)
$$V_f = \pi . r(w.h.r - 2V_t)$$

 $V_f = \pi . 1,5(1041.6.1,5-2.1932) = 25492 kgf$

d) o esforço de tração em uma faixa de 2 m de parede é dado por:



$$2 T = L .3 m . 2 m$$
 \therefore $T = 3 . L kgf$

Cada barra de aço CA-60 suporta a tração, considerando um coeficiente de segurança de 1,5, a seguinte carga:

$$\frac{60 \,\mathrm{kgf/mm}^2}{1.5} \cdot \frac{\pi \cdot (6 \,\mathrm{mm})^2}{4} = 1131 \,\mathrm{kgf}$$

 $T_{0-2} = 3 \cdot 640 = 1920 \text{ kgf}$

N.° de barras =
$$\frac{1920 \,\text{kgf}}{1131 \,\text{kgf}} = 1,7 \approx 2$$

 $T_{2-4} = 3 \cdot 1280 = 3840 \text{ kgf}$

N.° de barras =
$$\frac{3840 \,\text{kgf}}{1131 \,\text{kgf}} = 3.4 \approx 4$$

 $T_{4-6} = 3 \cdot 1920 = 5760 \text{ kgf}$

N.° de barras =
$$\frac{5760 \,\text{kgf}}{1131 \,\text{kgf}} = 5,1 \approx 6$$

e) um metro linear de parede pode suportar verticalmente:

$$P = \sigma_{adm}$$
 .
 $A = 6 \; kgf/cm^2$.
 $100 \; cm$.
 $25 \; cm = 15000 \; kgf$

Cargas verticais que atuam em um metro linear de parede:

- Telhado com cobertura de barro tipo colonial e 0,5 m de beiral

$$\frac{\pi.r^2.carga/m^2}{2\pi r} = \frac{\pi.(1.5 + 0.25 + 0.5m)^2.200 \, kgf/m^2}{2\pi (1.5 + 0.12) \, m} = 313 \, kgf/m$$

- Peso da alvenaria:

$$6 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 1800 \text{ kg/m} = 2700 \text{ kgf/m},$$

- Peso da silagem absorvida pela parede por atrito:

$$V_{t6} = 1932 \text{ kgf/m}, e$$

- Peso de equipamentos:

Carga Total =
$$313 + 2700 + 1932 + 1500 = 6445 \text{ kgf}$$

 $6445 \text{ kgf} << 15000 \text{ kgf}$

A alvenaria será capaz de suportar o esforço de compressão.

2 - Batatas:

As batatas armazenadas em silos exercem pressões horizontais nas paredes laterais, carga vertical nas paredes por atrito e carga vertical sobre o fundo.

O método proposto aqui, para obtenção destas cargas tem como base a publicação "Lateral Pressures on Walls of Potato Storage Units, Schaper and Herrick, USDA ARS 52-32, June 1968" a partir de ensaios em silos com 3 m de lado e aproximadamente 8 m de profundidade.

As pressões laterais, L, em kgf/m², são obtidas pela fórmula:

$$L = 86.9 + 136.1 \cdot h - 9.4 \cdot h^2$$
 Eq. 5

onde:

h = profundidade do silo, m

Para silos mais largos que 3 m, multiplique as pressões laterais pelo fator "c", que é dado por:

$$c = \sqrt{\frac{B}{3}}$$
 Eq. 6

onde:

B = largura do silo, m

As cargas verticais acumuladas, a uma profundidade h, v, em kgf/m de parede, podem ser estimadas considerando que 30% do peso da massa ensilada será absorvido por atrito pelas paredes, ou seja:

$$v = 0.075 \cdot h \cdot d \cdot w$$
 Eq. 7

onde:

h = profundidade, m

d = diâmetro ou lado quadrado do silo, m, e

w = peso específico da batata, 700 kgf/m³

As pressões sobre o fundo, em kgf/m2 devem ser calculadas assumindo que toda a massa ensilada apóia-se sobre o fundo, ou seja:

$$F = h \cdot w$$
 Eq. 8

onde:

h = altura do silo, m, e

w = peso específico da batata, 700 kgf/m³

Os silos podem possuir superfícies inclinadas ou dutos de ventilação. As cargas que atuam em um metro de comprimento destes elementos podem ser estimadas empregando o procedimento a seguir, conforme figuras 1 e 2:

A = base do duto

B = superfície da massa, verticalmente sobre o ponto A

C = intercessão da superfície da massa com a parede

D = intercessão da superfície do duto com a parede com a parede

E = intercessão da linha AB com a horizontal a partir do D

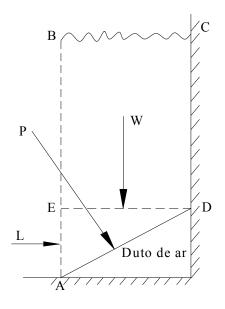
W = peso das batatas sobre o duto, kgf/m; = peso específico multiplicado pela área do trapézio ABCD

L = força lateral em AE, kgf/m; = pressão lateral na profundidade AE multiplicada pela altura AE em m

P = soma vetorial de w e L, kgf/m

P_c = força que comprime a parede do duto, kgf/m, e

P_f = força que atua perpendicular à parede inclinada, kgf/m





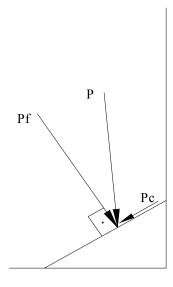


Figura 2

Aplicação:

Traçar o diagrama de forças que atuam na parede lateral de um depósito de batatas com $3 \times 3 \times 3 \times 3$ m

Resolução:

$$L = 86,9 + 136,1 \cdot h - 9,4 \cdot h^{2}$$

$$L_{0} = 86,9 \text{ kgf/m}^{2};$$

$$L_{1} = 213,6 \text{ kgf/m}^{2};$$

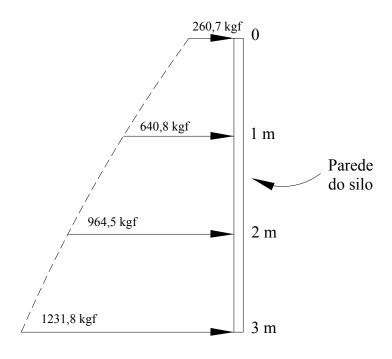
$$L_{2} = 321,5 \text{ kgf/m}^{2} \text{ e}$$

$$L_{3} = 410,6 \text{ kgf/m}^{2}$$

Sendo que uma faixa de 1 m de altura tem 3 m², então:

$$P_0 = 86.9 \cdot 3 = 260 \text{ kgf};$$

 $P_1 = 213.6 \cdot = 640.8 \text{ kgf};$
 $P_2 = 321.5 \cdot 3 = 964.5 \text{ kgf e}$
 $P_3 = 410.6 \cdot 3 = 1231.8 \text{ kgf}$



PRESSÕES E SOBREPRESSÕES EM SILOS GRANELEIROS

1 - Introdução

Os silos são unidades armazenadoras de grãos ou farinhas, caracterizados por serem estanques e herméticos ou semi-herméticos, que possibilitam o mínimo de influência do meio externo com o ambiente de estocagem.

Os silos podem ser verticais ou horizontais, característica esta determinada pela predominância das dimensões da altura em relação ao seu comprimento ou diâmetro (silo cilíndrico). Quanto à sustentação, em relação ao solo, são classificados em elevado, semisubterrâneo ou subterrâneo, por estarem acima, em posição intermediária ou abaixo do solo, respectivamente.

Atualmente, tanto em nível rural como industrial, o silo vertical elevado mostra-se mais viável por facilidade de manipulação, conservação e controle técnico do produto armazenado.

Os silos são classificados como verticais quando a sua altura:

$$H > \left(\frac{D}{2}\right) . tg\left(45^{\circ} + \frac{f}{2}\right)$$

sendo "D" o diâmetro ou lado quadrado e "f" o ângulo de atrito interno.

O presente trabalho apresentará duas conceituadas teorias empregadas no dimensionamento de silos, a de Janssen, desenvolvida na Alemanha, que é a base da Norma Americana ACI 313 - 1977 e a teoria de Marcel e André Reimbert, desenvolvida na França.

2 - Teoria de Janssen para silos verticais

Simbologia adotada:

f = Ângulo de atrito interno, grau;

f' = superficie da massa, verticalmente sobre o ponto A;

G = Peso específico do produto armazenado, kN/m³;

A = Área de seção transversal do silo, m²;

U = Perímetro do silo. m:

R = A/U = raio hidráulico médio, m;

h = Altura considerada para o cálculo das pressões, m;

Pv = Pressões verticais, MPa;

P_h = Pressão lateral ou horizontal, MPa;

Pw = Pressões de atrito, MPa;

Fa = Força vertical de atrito sobre a parede, kN/m;

Pn = Pressão normal na tremonha ou moega, MPa;

K = (1 - sen f)/(1 + sen f) = Relação entre a pressão horizontal e a pressão vertical;

W = tg f' = Coeficiente de atrito, igual a relação entre a pressão de atrito e a pressão horizontal;

H = Altura da célula, m;

Cd = Coeficiente de sobrepressão de descarga;

C_i = Coeficiente de impacto sobre o fundo.

Em 1985, Janssen, na Alemanha, lançou uma teoria que ficou famosa em todo o mundo e que ainda atualmente se utiliza. Ela consiste na determinação teórica das pressões em silos, em função da altura da célula, analisando o equilíbrio de uma massa de grãos de altura dh a uma altura h (Figura 1).

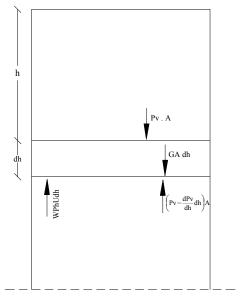


Figura 1 – Pressões de Janssen

Deste equilíbrio demonstrou que:

a) Pressões verticais por m² de superfície transversal do silo:

$$P_{V} = \left(\frac{GR}{WK}\right) \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{wkh}{R}\right)}\right)$$

b) Pressões horizontais ou laterais por m² de superfície vertical da parede:

$$P_{h} = \left(\frac{GR}{W}\right) \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{wkh}{R}\right)}\right)$$

c) Pressões de atrito na parede por m² de superfície da parede:

$$P_{W} = GR \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{Wkh}{R}\right)}\right)$$

d) Pressões de descarga:

Janssen desconhecia na época o aumento de pressões devido à descarga do material.

3 - Norma Americana - ACI - 313 - 1977

A norma Americana "Recomendações para o projeto e construção de células de concreto, silos e estruturas de armazenamento para materiais granulares (ACI - 313 - 77) e comentários" fornece critérios recomendados para o projeto e construção de silos baseado em estudos analíticos e experimentais.

3.1 - Pressões de carregamento

A norma americana adota valores de pressões definidas por Janssen para o cálculo das pressões estáticas de carregamento, ou seja:

$$P_h = \left(\frac{GR}{W}\right) \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{wkh}{R}\right)}\right) \quad ; \quad P_v = \left(\frac{GR}{WK}\right) \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{wkh}{R}\right)}\right)$$

A força vertical do atrito sobre a parede pode ser estimada por:

$$Fa = (Gh - 0.8P_v).R$$
; em KN/m

3.2 - Pressões de descarga

3.2.1 - pressões de descarga central

As pressões de descarga central são adotadas multiplicando os valores das pressões de carregamento por um fator de sobrepressão Cd. Este fator varia em função da altura e da relação entre altura (H) e lado (L) da célula (Quadro 1).

3.2.2 - Pressões de descarga excêntrica

A norma não especifica valores para estas pressões e comenta: "O efeito de descarga excêntrica que causa pressões não uniformes nas paredes deve ser considerado".

3.3 - Pressões sobre o fundo

3.3.1 - Fundo plano

As pressões sobre o fundo plano são calculadas multiplicando-se o valor da pressão vertical na altura h por um fator de sobrepressão Cd (Quadro 1) ou por um coeficiente de impacto Ci (Quadro 2), que leva em consideração a relação entre o volume total do silo e o volume de material carregado de uma só vez. Comenta também que para materiais não coesivos pode-se adotar 75% do valor de Cd.

Desta forma,

$$Pv' = cd.Pv$$
 ou $Pv' = Ci.Pv$

(usar o maior dos valores)

QUADRO 1 Valores dos Coeficientes de Sobrepressão Cd.

↓ topo do silo		H/D < 2	H/D = 2-4	H/D > 4
	Hs = D.tg(f)	1,35	1,45	1,50
	h	1,45	1,55	1,60
H = hs + 4h	h	1,55	1,65	1,75
	h	1,65	1,75	1,85
	h	1,65	1,75	1,85
↓b	ase da parede do silo			

Sobrepressão no	Concreto armado	1,35	1,35	1,35
fundo dos silos	Base metálica	1,50	1,50	1,50

QUADRO 2 Valores dos coeficientes de impacto Ci

Relação do volume carregado de uma só vez com a capacidade total do silo			1:3	1:4	1:5	1:6
Carfairnta la immanta Ci	Fundo de concreto	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
Coeficiente de impacto Ci	Fundo metálico	1,75	1,6	1,5	1,35	1,25

3.3.2 - Fundo com tremonhas

Considerando uma superfície inclinada em ângulo "a" com a horizontal:

$$Pva = P_h .sen^2 a + P_v .cos^2 a$$
 então

3.4 - Características físicas do material a armazenar

Para o cálculo das pressões, os dados de peso específico "G", o ângulo de atrito interno "f" e o coeficiente de atrito do material ensilado com a parede "W" são apresentados no Quadro 3.

O coeficiente de atrito é dividido em três classes, relacionadas com o tipo de superfície com o qual o material está em contato:

Classe 1 - Atrito praticamente dentro do material (chapas onduladas e trapezoidais).

Classe 2 - Paredes medianamente lisas (concreto alisado, reboco, madeira aplainada na direção das fibras, chapas com parafusos ou rebites),

Classe 3 - Paredes lisas (chapas de ferro ou alumínio soldadas, materiais sintéticos e superfície revestidas).

QUADRO 3 Características de alguns materiais

	Peso específico	Ângulo de atrito	Atrito	material-p	arede
Material	$G(kN/m^3)$	Interno (f)	W1	W2	W3
Trigo	9,00	31	0,60	0,40	0,25
Milho	8,00	31	0,60	0,40	0,25
Cevada	8,00	26	0,50	0,35	0,25
Farinha de cereais	7,00	27	0,50	0,35	0,25
Açúcar refinado	9,40	29	0,55	0,50	0,50
Cascalho p/concreto	18,00	31	0,60	0,50	0,50
Calcário	13,00	30	0,50	0,40	0,30
Clínquer	18,00	33	0,65	0,55	0,50
Cimento	16,00	28	0,55	0,40	0,30
Fosfato de Thómas	19,00	27	0,50	0,40	0,40
Óxido de alumínio	12,00	27	0,50	0,45	0,45

4 - Teoria de Marcel e André Reimbert para silos verticais e horizontais.

4.1 - Silos Verticais

As pressões estáticas sobre as paredes dos silos verticais podem ser determinadas satisfatoriamente aplicando as equações de Reimbert para silos cilíndricos ou poligonais. Contudo, sequencialmente é necessário que se considere as sobrepressões durante o carregamento, descarregamento, ou ainda, o mais importante, durante o carregamento e descarregamento simultâneos.

Simbologia

G = peso do produto ensilado (kg/m3);

f = ângulo de atrito interno do produto;

f" = ângulo de atrito interno mínimo do produto;

f' = ângulo de atrito sobre as paredes do silo;

b = ângulo do talude natural, em repouso;

D = diâmetro interno da secão reta de um silo cilíndrico:

a = lado interno da seção reta de um silo quadrado;

a' = lado interno menor da seção reta de um silo retangular;

b' = lado interno maior da seção reta de um silo retangular;

A = área da seção reta;

U = perímetro desta seção;

R = A/U = raio hidráulico médio;

h = profundidade de uma seção reta, a partir de cima;

h₁ = altura do cone superior de grãos;

H = altura do silo;

P_h = pressão horizontal sobre a parede, devido aos grãos, a profundidade h;

P_{hmax} = pressão horizontal máxima;

Pv = pressão vertical, devido aos grãos, a profundidade h;

P_{vmax} = pressão vertical máxima;

Q_{max} = carga vertical total máxima;

Ac = abscissa característica correspondente ao silo;

â = ângulo diedro do prisma de ruptura;

e = relação de esbeltez, e = H/a ou e = H/1,12 D;

Fórmulas gerais para o cálculo de pressões estáticas.

Pressão lateral máxima em um silo indefinido:

$$Ph_{max} = \frac{GD}{4.tg(f')}$$

Altura do cone superior:

$$h_1 = \frac{D}{2} \cdot tg(b)$$

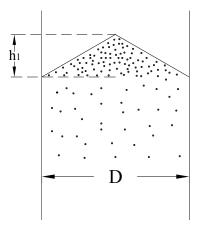


Figura 2 - Representação do Cone Superior.

Abscissa característica:

* Silos cilíndricos:

$$Ac = \left[\frac{D}{4 \operatorname{tg}(f') \cdot \operatorname{tg}^{2} \left(45^{\circ} - \frac{f''}{2}\right)}\right] - \frac{h}{3}$$

* Silos Poligonais:

$$Ac = \left[\frac{U}{\pi 4 \operatorname{tg}(f') \cdot \operatorname{tg}^{2} \left(45^{\circ} - \frac{f''}{2} \right)} \right] - \frac{h}{3}$$

* Silos quadrados:

$$Ac = \left[\frac{a}{\pi \operatorname{tg}(f') \cdot \operatorname{tg}^{2}\left(45^{\circ} - \frac{f''}{2}\right)}\right] - \frac{h}{3}$$

25

Pressão horizontal unitária sobre as paredes a profundidade h:

$$Ph = Ph_{m\acute{a}x} \left[1 - \left(\frac{h}{Ac} + 1 \right)^{-2} \right]$$

Pressão vertical unitária sobre uma seção reta a profundidade h:

$$Pv = \left\{ G \left\lceil h \left(\frac{h}{Ac} \right) + 1 \right\rceil^{-1} + \frac{h_1}{3} \right\}$$

Sobrepressões devido a descarga de silos verticais.

As sobrepressões provocadas pela descarga dos silos, e que são em geral superiores as pressões estáticas, fogem a possibilidade de um cálculo analítico.

As sobrepressões devidas a descarga simples, devidas a carga e descarga simultâneas dos silos são funções da disposição e número dos orifícios de descarga, da esbeltez dos silos e da natureza dos produtos ensilados, onde

$$e = \frac{H}{1,12D}$$
 ou $e = \frac{H}{a}$

De acordo com os tipos de instalações mais correntes, existem 14 casos principais de descarga, como se pode observar na figura a seguir:

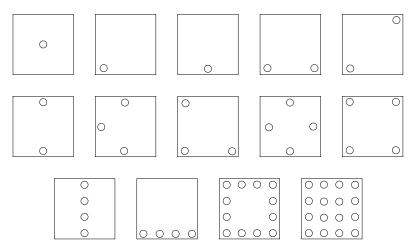


Figura 3 - Tipos de casos de orifícios de descarga

Experiências recentes têm permitido confeccionar tabelas de coeficientes de sobrepressões a aplicar sobre os valores das pressões estáticas, nas diversas profundidades, tendo como base a esbeltez dos silos e segundo os diversos casos de orifícios de descarga.

A seguir apresenta-se um exemplo de aplicação das tabelas dos coeficientes kd devidos a descarga e dos coeficientes de kb multiplicadores de kd para o caso de carga e descarga simultâneas, para o caso do orifício de descarga central (1º caso da figura 3).

QUADRO 4 Coeficientes de sobrepressões para o caso de somente descarga (kd) e carga-descarga simultâneos (kb - multiplicador de kd), para descarga central.

h\e	k _d						k _b			
II (C	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0,2H	1,20	1,33	1,43	1,51	1,59	1,14	1,25	1,32	1,39	1,44
0,4H	1,44	1,58	1,70	1,79	1,86	1,18	1,26	1,33	1,38	1,42
0,6H	1,49	1,72	1,91	2,06	2,21	1,14	1,22	1,27	1,32	1,34
0,8H	1,30	1,42	1,51	1,57	1,63	1,15	1,28	1,38	1,45	1,51
0,9H	1,07	1,18	1,17	1,20	1,22	1,15	1,30	1,43	1,56	1,67

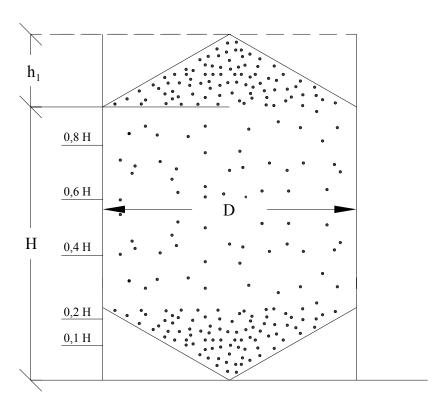


Figura 4 - Representação das alturas relativas.

Aplicação:

Para um silo de seção quadrada, de $5,00 \times 5,00 \text{ m}$, com 15,00 m de altura, descontando o cone superior de grãos, com orifício de descarga central e que contenha areia, de densidade G = 1380 kg/m3 e ângulo de atrito interno mínimo e atrito sobre as paredes $f'=f'=33^{\circ}40'$ (caso particular de silos de paredes onduladas) tem-se:

Altura do cone superior da massa ensilada:

$$h_1 = \frac{5,00}{2} \cdot tg(33^{\circ}40') = 1,665 \,\mathrm{m}$$

Abscissa característica:

$$Ac = \left[\frac{5,00}{\pi \operatorname{tg}(33^{\circ}40') \cdot \operatorname{tg}^{2}\left(45^{\circ} - \frac{33^{\circ}40'}{2}\right)} \right] - \frac{1,665}{3} = 7,78 \,\mathrm{m}$$

Esbeltez em silo:

$$e = \frac{15,00}{5} = 3,00$$

Pressão lateral estática máxima:

$$Ph_{max} = \frac{1380.5,00}{4. tg(33^{\circ}40')} = 2590 \, \text{Kg/m}^2$$

Pressão lateral unitária a profundidade h:

$$Ph = Ph_{m\acute{a}x} \left[1 - \left(\frac{h}{Ac} + 1 \right)^{-2} \right]$$

Os coeficientes respectivos kd e kb para uma esbeltez de silo igual a 3 são os seguintes:

Níveis	0,2 H	0,4 H	0,6 H	0,8 H	0,9 H
h	3,00	6,00	9,00	12,00	13,50
K _d	1,43	1,70	1,91	1,51	1,17
K _b	1,32	1,33	1,27	1,38	1,43

Cálculo das pressões estáticas:

h	P _h	P _h .k _d	P _h .k _d .k _b
3,00	1,241	1,775	2,341
6,00	1,764	2,999	3,988
9,00	2,033	3,883	4,931
12,00	2,189	3,305	4,561
13,50	2,244	2,625	3,754

Tendo sido determinadas as pressões estáticas Ph, as pressões dinâmicas devidas somente a descarga são iguais: $P_h.k_d$, e as sobrepressões devidas a carga e descarga simultâneas são iguais a $P_h.k_b.k_d$ para cada nível considerado.

É possível, então, traçar as curvas de pressões e sobrepressões como se pode observar na figura a seguir.

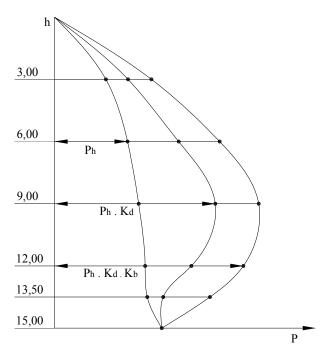


Figura 5 - Curvas de pressão e sobrepressão em função da altura.

Quando for o caso de um silo com tipo de descarga diferente da central, emprega-se os coeficientes constantes na tabela a seguir, que são resultantes da combinação das piores situações de todos os casos apresentados na Figura 3.

 $\begin{array}{c} QUADRO\ 5\\ Coeficientes\ de\ sobrepressões\ para\ o\ caso\ de\ somente\ descarga\ (kd)\ e\ carga-descarga\\ simultâneos\ (k_b\ -\ multiplicador\ de\ k_d),\ para\ qualquer\ tipo\ de\ descarga. \end{array}$

h \ e		$\mathbf{k_d}$						k _b		
II (C	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0,2H	1,40	1,56	1,69	1,80	1,89	1,14	1,27	1,40	1,50	1,57
0,4H	1,51	1,74	1,93	2,09	2,04	1,18	1,26	1,33	1,38	1,42
0,6H	1,52	1,77	1,99	2,16	2,32	1,22	1,22	1,27	1,32	1,34
0,8H	1,53	1,79	2,00	2,17	2,36	1,20	1,30	1,40	1,50	1,58
0,9H	1,42	1,63	1,81	1,95	2,09	1,19	1,35	1,50	1,63	1,78

Coeficientes de sobrecarga relativos a natureza dos produtos armazenados.

Os coeficientes dos Quadros 4 e 5 foram estabelecidos de acordo com experiências tomando a areia fina como material de base de estudo. No entanto, estes coeficientes variam de acordo com a natureza dos materiais armazenados.

O Quadro 6 apresenta os valores médios dos coeficientes relativos ao milho, ao trigo e a levedura química e designados K_{a1} para o caso de descarga simples e K_{a2} para o caso de carga e descarga simultânea. Estes coeficientes são multiplicadores dos coeficientes relativos a areia, de acordo com a esbeltez dos silos e do dispositivo de descarga dos mesmos.

QUADRO 6 Coeficiente para correção da sobrepressão em função do tipo de material.

Material	Coeficiente	Alturas							
Matchiai	Coefficiente	0,2 H	0,4 H	0,6 H	0,8 H	0,9 H			
Areia	K _{a1}	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			
Aleia	K _{a2}	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			
Milho	K _{a1}	1,35	1,35	1,50	1,30	1,15			
Milho	K _{a2}	1,35	1,43	1,65	1,70	1,80			
Trico	K _{a1}	0,90	0,95	0,95	0,95	1,05			
Trigo	K _{a2}	0,90	1,00	1,00	1,05	1,15			
Levedura	K _{a1}	1,80	1,65	1,45	1,20	1,10			
química	K _{a2}	1,80	1,70	1,50	1,30	1,15			

Aplicação:

1º caso - Somente carga ou descarga

Calcular, para diferentes alturas, as pressões laterais dinâmicas que atuam em um silo quadrado de paredes rugosas, de 4,00 m de lado, que contenha trigo, com ângulo de atrito interno mínimo 250 e densidade 750 kg/m³ sobre uma altura de 20 m de coluna de grãos, sendo a descarga central.

Para a aplicação direta dos elementos técnicos anteriormente estabelecidos, os cálculos seguirão os seguintes níveis sucessivos, a partir da parte superior da massa ensilada:

$$h_1 = 0.2H = 4.00 \text{ m},$$

 $h_2 = 0.4H = 8.00 \text{ m},$
 $h_3 = 0.6H = 12.00 \text{ m},$
 $h_4 = 0.8H = 16.00 \text{ m},$
 $h_5 = 0.9H = 18.00 \text{ m}.$

Cálculo das pressões laterais sobre as paredes:

$$tg f'' = tg 25^{\circ} = 0,466$$

 $tg^{2} \left[45^{\circ} - \left(\frac{f''}{2} \right) \right] = 0,406$

Pressão lateral máxima:

$$Ph_{max} = \frac{750.4,00}{4,00.0,466} = 1610 \, \text{Kg} \, / \, \text{m}^2$$

Abscissa característica com f' = f'':

$$Ac = \left(\frac{4,00}{\pi.0,466.0,406}\right) - \left(\frac{4,00.0,466}{2.3}\right) = 6,42 \text{ m}$$

A pressão lateral, numa profundidade h é dada por:

$$Ph = Ph_{max} \left[1 - \left(\frac{h}{Ac} + 1 \right)^{-2} \right]$$

onde:

P/ a altura de trigo h (m)	Ph (kg/m²)
4,00	998
8,00	1292
12,00	1415
16,00	1478
18,00	1500

As pressões laterais máximas Phdin nas alturas consideradas, devido a descarga, tem por valores as pressões Ph, calculadas anteriormente, multiplicadas pelos coeficientes dinâmicos kd e Ka1, relativos a descarga central e trigo, para uma esbeltez do silo igual a 20m/4m = 5:

$$\begin{array}{rl} Phdin &= Ph \cdot kd \cdot Ka1 \\ P_{4din} &= 998 \cdot 1,59 \cdot 0,90 = 1428 \ kg/m^2 \\ P_{8din} &= 1292 \cdot 1,86 \cdot 0,95 = 2283 \ kg/m^2; \\ P_{12din} &= 1415 \cdot 2,21 \cdot 0,95 = 2970 \ kg/m^2; \\ P_{16din} &= 1478 \cdot 1,63 \cdot 0,95 = 2289 \ kg/m^2; \\ P_{18din} &= 1500 \cdot 1,22 \cdot 1,05 = 1921 \ kg/m^2 \end{array}$$

2.º caso – Carga e descarga simultâneas

Calcular, segundo exemplo precedente, as pressões laterais máximas sobre as paredes, nos mesmos níveis considerados, no caso de carga e descarga simultâneas do silo.

As pressões laterais devidas a carga e descarga simultâneas são dados por:

Obs.: os dois exemplos anteriores mostram a importante economia que pode ocorrer quando os silos são equipados com tubos antidinâmicos.

4.2 - Silos horizontais ou silos baixos

Recomenda-se usar as fórmulas e os coeficientes para silos verticais para carga e descarga simultâneas.

Generalidades

Os silos horizontais de grande capacidade são geralmente constituídos por compartimentos paralelepípedicos, de grandes dimensões horizontais, e desta forma as fórmulas de determinação dos valores das pressões sobre essas paredes ou muros são diferentes daquelas que afetam as paredes dos silos verticais estudados anteriormente.

Cálculo de forças que atuam sobre as paredes dos silos horizontais.

Sabemos que no caso de uma massa ensilada de superfície livre horizontal e de densidade "G" retida por uma parede vertical de altura "H", o valor da componente horizontal que atua a 1/3 da altura a partir da base, por unidade de comprimento é dada por:

$$P = \left(\frac{G.H^{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{180^{\circ} - 2f''}{180^{\circ} + 2f''}\right)^{2}$$

O plano de deslizamento do prisma de empuxo forma com a vertical um ângulo $b = (45^{\circ} - f'/3)$, que permite definir se o silo deverá ser calculado com o horizontal ou vertical.

Para tanto, tem-se que considerar dois casos, com a superfície livre da massa ensilada horizontal ou superfície inclinada segundo o talude natural.

1º caso - Superfície livre da massa ensilada horizontal

Consideremos a massa ensilada da figura 1, retida por dois muros verticais AB e DE, separados de d.

Os primas de empuxo relativos a cada um dos muros AB e DE definem entre si uma zona (4) que não tem influência sobre cada muro. Estes valores de empuxos são, portanto, calculados seguindo as fórmulas para silos horizontais, e para este caso:

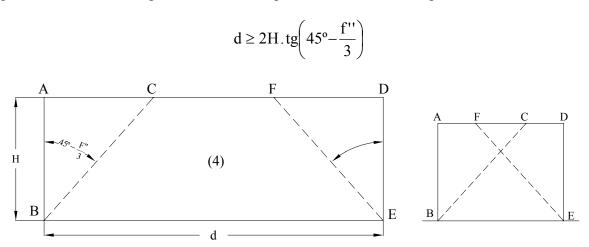


Figura 6 - Silo com superfície da massa ensilada plana.

Se pelo contrário, a distância d é menor, tem-se uma interação dos prismas ABC e DEF e o silo deverá ser calculado como vertical.

2º caso - A superfície livre da massa ensilada é inclinada segundo o ângulo do talude natural.

O problema é o mesmo anterior, no entanto a zona (3), corresponde ao prisma de empuxo, se estende a uma distância d da parede AB, maior que no caso da superfície livre horizontal. Assim a distância "d" é igual a (considerando b aproximadamente f"):

$$d \ge H. \left[\frac{\operatorname{sen}\left(45^{\circ} - \frac{f''}{3}\right) \cdot \operatorname{cos} f''}{\operatorname{sen}\left(45^{\circ} - \frac{2f''}{3}\right)} \right]$$

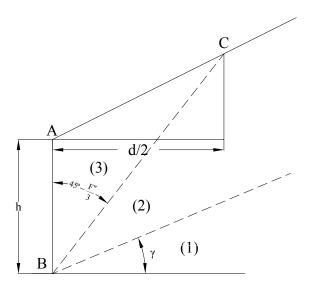


Figura 7 - Silo com massa ensilada em talude natural.

Neste caso, o valor da componente horizontal, aplicada a 1/3 da altura, por metro linear de comprimento é dado por:

$$P = \left(\frac{G.H^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{180^{\circ} - 2f''}{180^{\circ} + 2f''}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2f''}{180^{\circ}}\right)$$

4.3 - Solicitações sobre os fundos ou tremonhas dos silos

Distribuição das pressões sobre o fundo plano de um silo

No caso de silos de fundo plano a pressão vertical média que atua sobre este está dada pelas fórmulas mencionadas anteriormente. Contudo, estudos experimentais tem mostrado que esta pressão não está uniformemente repartida sobre o fundo em razão do atrito dos grãos sobre as paredes.

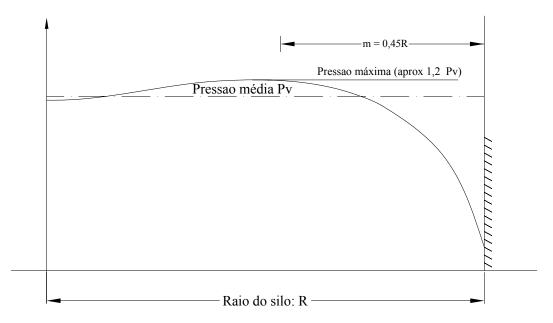


Figura 8 - Distribuição da pressão sobre o fundo do silo.

A pressão vertical é máxima a 0,45R da extremidade, atingindo 1,20 da pressão média, e mínima próxima à parede.

No momento da descarga, a distribuição das pressões se modifica profundamente, contudo não causa variações maiores que 2% sobre as pressões máximas sobre o fundo.

Pressões exercidas por um monte de areia, cônico, sobre um plano horizontal.

Neste caso, de um monte cônico de areia, não existe a influência do atrito grãoparede, e as pressões medidas permitem traçar a curva C representativa de sua repartição sobre o plano horizontal, como na figura a seguir.

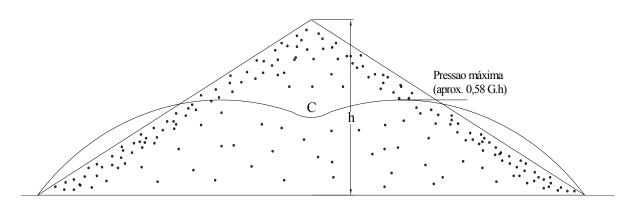


Figura 9 - Distribuição das pressões sobre um fundo plano devido a um monte cônico de areia.

Verifica-se que, contrariamente ao que geralmente se admitia, a pressão máxima não está no centro, onde a altura de areia é maior.

TREMONHAS DE SILOS

1 - Descrição das cargas

As células dos silos terminam em sua parte inferior em tremonhas, cuja forma é geralmente tronco-cônica, no caso de células cilíndricas, ou piramidais, no caso de células quadradas, ou retangulares, para permitir a descarga total da matéria ensilada pela abertura de descarga situada no ponto mais baixo.

Para os cálculos das paredes das tremonhas são consideradas as seguintes cargas:

- 1 A pressão exercida pela massa ensilada na borda inferior das paredes verticais;
- 2 O peso da matéria ensilada contida na tremonha;
- 3 O peso próprio das paredes das tremonhas; e
- 4 O peso dos equipamentos fixados à tremonha.

1.1 - Pressões devidas à matéria ensilada

Seja uma tremonha ABCD cuja seção vertical se inscreve no triângulo ABE, de altura h", formado pelo plano horizontal, ao nível inferior das paredes verticais da célula do silo, e pelas paredes inclinadas da tremonha, conforme figura a seguir.

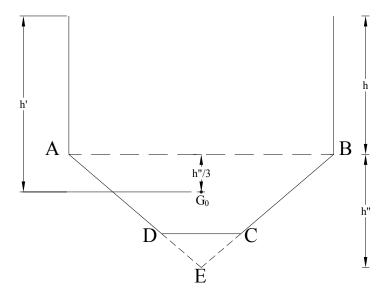


Figura 10 - Pressões devidas à massa ensilada.

Seja "G" o centro de gravidade do triângulo e h' a altura a partir deste ponto:

$$h' = h + \left(\frac{h''}{3}\right)$$

Calculam-se as pressões horizontais, Ph, e vertical, Pv, devido a massa ensilada como se a parede fosse vertical até Go.

Considerando "i" a inclinação da parede da tremonha, tem-se as seguintes pressões por unidade de superfície:

$$P'h' = Ph'sen(i)$$

$$P'v' = Pv'cos(i)$$

Faz-se a composição das pressões P'h' e P'v' e se obtém a resultante Rz', que se decompõe em seqüência segundo as direções da tremonha e de sua normal, resultando nas componentes RT e RN.

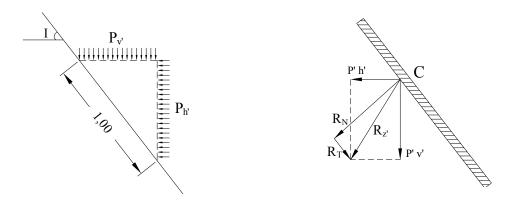


Figura 11 - Composição e decomposição das pressões.

1.2 - Peso do material contido dentro da tremonha, da tremonha, e dos equipamentos.

Seja P₁ o peso da massa ensilada dentro da tremonha e P₂ o peso próprio de suas paredes e dos equipamentos fixados nela.

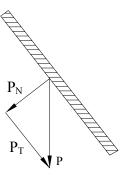


Figura 12 - Determinação do peso resultante da tremonha, do material contido nela e dos equipamentos.

Considerando S' a superfície das paredes; para simplificar, a pressão vertical que resulta por unidade de área de parede é:

$$P = \left(\frac{P_1 + P_2}{S}\right)$$

Em seguida decompõe-se esta pressão vertical unitária em P_T , segundo a direção da parede da tremonha, e P_N , de acordo com a normal da referida parede.

2- Cálculo dos elementos

2.1 - Tremonha tronco-cônica

Conhecendo os esforços normais $(R_N + P_N)$ e tangenciais $(R_T + P_T)$ na direção da tremonha, determina-se a resultante R destes esforços e, em seguida, procede-se a decomposição desta segundo a horizontal e a direção da parede, o que dá a resultante horizontal R_H para o cálculo das armaduras meridianas.

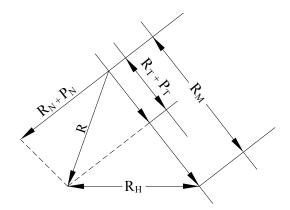


Figura 13 - Composição e decomposição dos esforços.

Ferragens anelares

Consideremos dois anéis separados de uma distância x e seja r' o raio interior da tremonha na altura destas ferragens. O esforço de tração produzido por R_H é

$$T = R_H . \Delta x . r'$$

Este esforço de tração deve ser equilibrado por uma ferragem de seção w', cuja tensão admissível à tração é σ_a , de forma que:

$$w'.\sigma_a = R_H.\Delta x.r'$$

de onde se deduz que a separação entre os ferros deverá ser

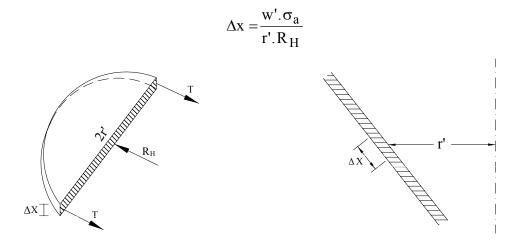


Figura 14 - Representação das ferragens anelares

Ferragens radiais.

As ferragens radiais são colocadas para equilibrar o esforço de tração R_M.

Observa-se que, na junção da tremonha com a parede do silo, as ferragens verticais da parede do silo terão continuidade para a suspensão da tremonha.

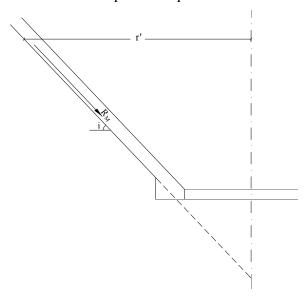


Figura 15 - Representação do esforço radial da tremonha.

Para toda seção horizontal de raio r' da tremonha, toma-se a superfície de parede situada abaixo desta secção, ligeiramente por excesso, como igual a:

$$\frac{\pi r'^2}{\cos(i)}$$

Portanto, o esforço de tração sobre a seção é

$$\frac{R_{\rm M}.\pi r'^2}{\cos(i)}$$

e o esforço de tração, por metro de perímetro da secção considerada, é

$$\frac{R_{M} \cdot \pi r'^{2}}{2\pi r' \cos(i)} = \frac{R_{M} \cdot r'}{2\cos(i)}$$

Logo, se w' é a secção da ferragem radial da tremonha, a separação destes ao longo da secção circular horizontal de raio r' é:

$$\Delta x = \frac{w'.\sigma_a . 2\cos(i)}{R_M.r'} = \frac{R_M.\pi r'^2}{\cos(i)} \cdot \frac{\Delta x}{2\pi r'} = w'\sigma_a$$

$$fração = \frac{\Delta x}{2\pi r'}$$

Espessura da laje da tremonha

Supondo, como para as paredes verticais, que o concreto pode suportar, sem trincas, um esforço de tração de $25~kg/cm^2$, para equilibrar o esforço de tração $R_{\rm H}$. r', o mesmo deverá ter uma espessura, em cm,

$$e \ge \frac{R_{\mathrm{H}}.\mathrm{r'}}{100.25.\mathrm{sen}(\mathrm{i})}$$

Anel de união entre a parede cilíndrica e a tremonha

Toma-se a carga total que atua sobre a tremonha, ligeiramente por excesso, considerando a pressão vertical no ponto G, igual a

$$Pv'.S + P_1 + P_2$$

ou seja, por metro linear do anel,

$$\frac{Pv'.S + P_1 + P_2}{2\pi r}$$

A componente horizontal desta carga unitária é

$$\left(\frac{Pv'.S + P_1 + P_2}{2\pi r}\right) \cdot \cot g(i)$$

e o esforço de compressão do anel de união da parede cilíndrica com a tremonha, em kgf, é

$$N = \cot g(i) \cdot \left\lceil \frac{(Pv'.S) + P_1 + P_2}{2\pi r} \right\rceil$$

2.2 - Tremonha piramidal regular

Os esforços normais $(R_N + P_N)$, tangenciais (R_M) e horizontais (R_H) são os mesmos indicados anteriormente, e as paredes planas das tremonhas devem ser calculadas à flexão composta, levando em conta os esforços normais $(R_N + P_N)$, para os momentos fletores, e os esforços de tração correspondentes.

Desconhece-se o cálculo exato de placas trapezoidais como as paredes das tremonhas dos silos, contudo, tem-se obtido resultados satisfatórios com as regras práticas a seguir: "os momentos fletores positivos máximos em uma placa triangular regular são aproximadamente iguais aqueles em uma placa circular com mesma superfície, e os momentos negativos máximos nos apoios são considerados iguais a 2/3 dos momentos positivos."

Seja uma parede de tremonha, ABCD, em forma de trapézio, inscrita no triângulo equilátero ABE de superfície S. O raio do círculo equivalente ao triângulo é $r = \sqrt{S/\pi}$ e o momento positivo máximo devido a uma carga p, no caso de apoios livres, é:

$$Mo = \frac{3pr^2}{16} = \frac{3pS}{16\pi} = 0.06pS$$

onde $p = R_N + P_N$

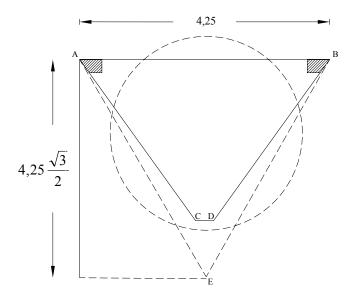


Figura 16 - Equivalências de seções.

No caso de uma parede engastada em seus apoios, toma-se com aproximação suficiente:

Momento do centro: $M' = 0.06 \, pS. \, 0.8 = 0.048 \, pS$

Momentos em apoios : M''= $0.06 \left(\frac{2}{3}\right) pS.0.8 = -0.032 pS$

Exemplo:

Seja a placa da figura anterior, submetida a uma carga de 3.000 kg/m², considerada uniformemente distribuída.

- Superficie da placa, segundo o triângulo equilátero circunscrito:

$$S = 4.25^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 7.80 \,\text{m}^2$$

- Momento fletor no centro da placa:

$$M = 0.048.3000.780 = 1123 \text{ kgm}$$

- Momento fletor no apoio:

$$M' = -0.032.3000.7,80 = -749 \text{ kgm}$$

2.3 - Tremonhas assimétricas ou excêntricas

Calcular separadamente os esforços para cada parede da tremonha levando em conta o respectivo ângulo de inclinação.

Esforços verticais de tração nas paredes da tremonha

Aos cálculos anteriores temos que acrescentar as ferragens necessárias para a suspensão das tremonhas até as paredes das células, que trabalham como vigas laminares.

As cargas são as seguintes:

1 - Ao nível inferior das paredes verticais da célula, AB, a carga vertical devida a massa ensilada:

$$Q_{H} = G.S \left[\left(h + \frac{h}{3} \right) - \left(\frac{h^{2}}{(h+A)} \right) \right]$$

2 - Peso da massa ensilada que carrega a tremonha, que ligeiramente por excesso, é igual a:

$$P_1 = G.S. \frac{h''}{3}$$

3 - Peso próprio das paredes da tremonha e peso dos equipamentos fixados a elas, ou seja P_2 .

Considerando o perímetro igual a "c", o esforço de tração nas paredes verticais, no metro linear de parede é, portanto:

$$T = \frac{Q_H + P_1 + P_2}{c}$$

Chamado de w' a seção de ferragem escolhida para barras de suspensão, a separação entre estas barras será:

$$\Delta x = \frac{w'.\sigma_a.c}{Q_H + P_1 + P_2}$$

No caso de tremonhas assimétricas, a carga total deverá ser repartida proporcionalmente em função da superfície de cada parede adjacente da tremonha.

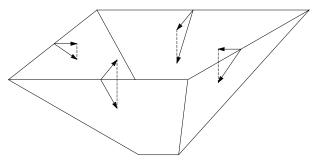


Figura 17 - Tremonha piramidal.

Compressão das vigas superiores da tremonha.

O esforço total de tração para uma parede de tremonha de superfície S" é RM . S". Do mesmo modo o esforço de tração para a parede oposta de S", é RM . S".

Tais esforços produzem nas vigas de contorno uma compressão média horizontal de

$$\frac{\text{RM.cos(i).(S''+S''')}}{2}$$

Pressões e sobrepressões sobre as paredes das tremonhas

As sobrepressões nas tremonhas podem ser calculadas tendo como base os pontos 1, 2 e 3 ao longo da parede da tremonha, conforme figura a seguir:

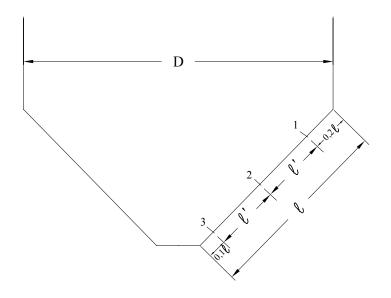


Figura 18 - Determinação das sobrepressões em tremonhas.

Tomando como base a inclinação de 45º para a tremonha, os coeficientes de majoração das pressões nos pontos 1, 2 e 3 são fornecidos no quadro a seguir:

 $QUADRO\ 7$ Coeficientes de sobrepressões, $K_{t45},$ no ponto 1, para as tremonhas.

Material	Descarga			Carga-descarga		
ensilado	1	2	3	1	2	3
Areia fina	1,70	1,35	1,00	1,95	1,47	1,00
Milho	2,55	1,77	1,00	2,80	1,90	1,00
Trigo	2,60	1,80	1,00	2,90	1,95	1,00
Levedura	3,00	2,00	1,00	3,40	2,20	1,00

Verifica-se, portanto, que no ponto 3, nas cercanias do orificio de descarga, não se manifesta nenhum fenômeno de sobrepressão.

O coeficiente K_t pode ser corrigido em função da inclinação das paredes das tremonhas empregando-se as equações e figura a seguir:

* para $0 < A_1 \le 45^{\circ}$

$$K_{tA1} = 1.02 + (K_{t45} - 1.02).\frac{A_1}{45^{\circ}}$$

* para $0 < A2 \le 45^{\circ}$

descarga simples

$$K_{tA2} = K_d.K_{a1} + (K_{t45} - K_d.K_{a2}).\frac{A_2}{45^\circ}$$

carga e descarga simultâneos,

$$K_{tA2} = K_d.K_{a2}.K_b + (K_{t45} - K_d.K_{a2}.K_b).\frac{A_2}{45^\circ}$$

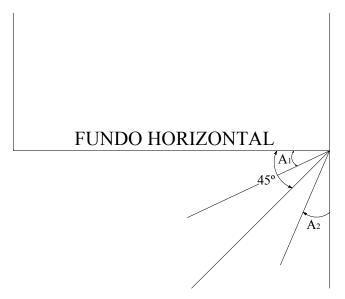


Figura 19 - Representação das inclinações das tremonhas.

ANÁLISE ESTRUTURAL

1 - Domínio de estudo da análise estrutural

A análise estrutural é a parte da mecânica que estuda as estruturas, com o objetivo determinar os esforços e as deformações a que elas ficam submetidas quando solicitadas por agentes externos (cargas, variações térmicas, movimentos de seus apoios, etc.).

As estruturas se compõem de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior de modo a formar um conjunto estável, isto é, um conjunto capaz de receber solicitações externas, absorvê-las internamente e transmiti-las até seus apoios, onde estas solicitações externas encontrarão seu sistema estático equilibrante.

As peças que compõem as estruturas possuem, evidentemente, três dimensões. Três casos podem ocorrer:

- a) duas dimensões são pequenas em relação à terceira;
- b) uma dimensão é pequena em relação às outras duas;
- c) as três dimensões são consideráveis.

No 1º caso, que corresponde ao da maioria das estruturas da prática, a dimensão maior é o comprimento da peça, estando as duas outras dimensões situadas no plano a ele perpendicular (plano da seção transversal da peça). Neste caso, o estudo estático da peça, que será denominada barra, pode ser feito considerando-a unidimensional, isto é, considerando-a representada pelo seu eixo (lugar geométrico dos centros de gravidade de suas seções transversais). Uma barra será dita reta ou curva, conforme seu eixo seja reto ou curvo. Conforme os eixos das diversas barras que compõem a estrutura estejam ou não contidos no mesmo plano, a estrutura será chamada estrutura plana ou espacial.

O 2º e o 3º casos são aqueles, respectivamente, das placas e cascas e dos blocos (caso das barragens) e não serão abordados neste trabalho.

2 - Condições de equilíbrio

Para um corpo, submetido a um sistema de forças, estar em equilíbrio, é necessário que elas não provoquem nenhuma tendência de translação nem rotação a este corpo. Como a tendência de translação é dada pela resultante **R** das forças e a tendência de rotação, em torno de qualquer ponto, é dada pelo momento resultante **m** destas forças em relação a este ponto, basta que estes dois vetores **R** e **m** sejam nulos para que o corpo esteja em equilíbrio.

A condição necessária e suficiente para que um corpo esteja em equilíbrio, submetido a um sistema de forças, é que estas forças satisfaçam às equações vetoriais:

$$R = 0$$

$$m = 0$$
I.5

em que ${\bf R}$ é a resultante das forças e ${\bf m}$ seu momento resultante em relação a qualquer ponto do espaço.

Levando-se em conta que:

$$R = (\sum X) \vec{i} + (\sum Y) \vec{j} + (\sum Z) \vec{k}$$
$$m = (\sum M_x) \vec{i} + (\sum M_y) \vec{j} + (\sum M_z) \vec{k}$$

As 2 equações vetoriais de equilíbrio (I.5) podem ser substituídas, cada uma delas por três equações escalares de equilíbrio, obtendo-se o grupo das seis equações (I.6), que são as seis equações universais da estática, regendo o equilíbrio de um sistema de forças, o mais geral, no espaço.

$$X = 0$$
 $\sum Y = 0$ $\sum Z = 0$ I.6
 $\sum M_X = 0$ $\sum M_Z = 0$

3 - Graus de liberdade, apoios, estaticidade e estabilidade

3.1 - Graus de liberdade

Já sabemos que a ação estática de um sistema de forças no espaço, em relação a um dado ponto, é igual à de sua resultante e à de seu momento resultante em relação àquele ponto, provocando, a primeira, uma tendência de translação e, o segundo, uma tendência de rotação. Como, no espaço, uma translação pode ser expressa por suas componentes segundo 3 eixos tri ortogonais e, uma rotação, como a resultante de três rotações, cada uma em torno de um desses eixos, dizemos que uma estrutura no espaço possui um total de 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações, segundo 3 eixos tri ortogonais).

É evidente que estes 6 graus de liberdade precisam ser restringidos, de modo a evitar toda tendência de movimento da estrutura, a fim de ser possível seu equilíbrio. Esta restrição é dada por apoios, que devem impedir as diversas tendências possíveis de movimento, através do aparecimento de reações destes apoios sobre a estrutura, nas direções dos movimentos que eles impedem, isto é, dos graus de liberdade que eles restringem. Estas reações de apoio se oporão às cargas aplicadas à estrutura, formando este conjunto de cargas e reações um sistema de forças em equilíbrio, e regidas, portanto, pelos grupos de equações deduzidos no item anterior, para os diversos tipos de sistemas de forças que podem ocorrer na prática.

3.2 - Apoios

A função dos apoios, conforme vimos em 3.1, é a de restringir graus de liberdade das estruturas, despertando com isto reações nas direções dos movimentos impedidos. Eles serão classificados em função do número de graus de liberdade permitidos (ou do número de movimento impedidos), podendo ser, então, de 6 tipos diferentes (isto é, podendo permitir 5, 4, 3, 2, 1 ou nenhum grau de liberdade). Os exemplos seguintes esclarecerão.

a) Seja o apoio representando na Figura I-21, em que temos a estrutura apoiada sobre uma esfera perfeitamente lubrificada. O único movimento que ela será capaz de impedir é a translação na direção vertical Oz, aparecendo com isto uma reação Rz agindo sobre a estrutura, conforme indica a Figura I-21. O apoio será dito, então, um apoio com 5 graus de liberdade (ou com 1 movimento impedido).

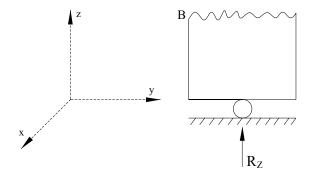


Figura I-21

b) Seja, agora, o apoio da Figura I-22, constituído por três esferas ligadas entre si por três hastes, de modo a ficar formado um conjunto rígido. Ficam impedidas, no caso, além da translação na direção z, as rotações em torno dos eixos x e y. O apoio será dito, então, um apoio com 3 graus de liberdade (que são, no caso, a rotação em torno do eixo O_z e as translações nas direções dos eixos O_x e O_y) ou com 3 movimentos impedidos. Aparecerão, agindo sobre a estrutura, as reações M_x , M_y e R_z indicadas na figura.

c) O esquema das Figura I-23 representa a ligação rígida entre a estrutura e seu apoio, de dimensões tão maiores que as da estrutura, que podem ser consideradas infinitas em presença daquelas. Neste caso, o apoio impedirá todos os movimentos possíveis, sendo dito um apoio sem grau de liberdade (ou com todos os movimentos impedidos). Correspondendo a cada um dos movimentos impedidos, aparecem, agindo sobre a estrutura, as reações R_x , R_y , R_z , M_x , M_y e M_z indicadas na figura. Tal apoio é chamado engaste.

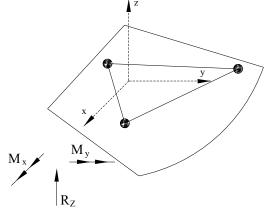


Figura I-22

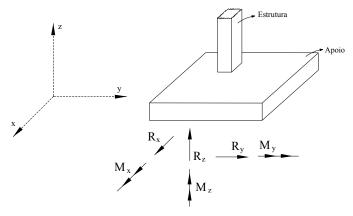
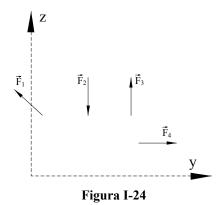


Figura I-23

3.2.1 - Estruturas planas carregadas no próprio plano.

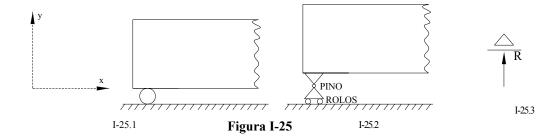
Para o caso das estruturas planas carregadas no próprio plano, que é o mais frequente nas análises estruturais, existem 3 graus de liberdade a combater, senão vejamos.

Supondo a estrutura situada no plano xy, conforme indica a Figura I-24, os graus de liberdade a combater são as translações nas direções O_x e O_y e a rotação em torno de um eixo perpendicular ao plano (no caso, O_z), pois estas são as únicas tendências de movimento capazes de serem produzidas pelo sistema de forças indicado.



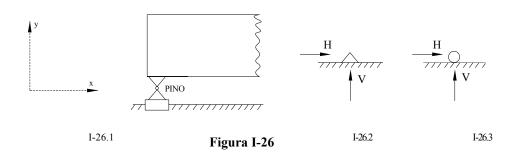
São os seguintes os apoios utilizáveis para impedir estes movimentos:

a) Apoio do 1º gênero do charriot



O apoio do 1º gênero pode ser obtido por uma das duas formas representadas nas Figuras I-25.1 e I-25.2. Na primeira, temos a estrutura apoiada sobre um rolo lubrificado que impede apenas o deslocamento na direção y, permitindo livre rotação em torno dele, assim como livre deslocamento na direção x; na segunda, a rotação é assegurada por um pino sem atrito e a translação, na direção x, pelos rolos diretamente em contato com o plano que serve de apoio, continuando impedido o deslocamento na direção y. Representa-se, esquematicamente, o apoio do 1º gênero pela forma indicada na Figura I-25.3. Na direção do único movimento impedido aparece uma reação de apoio R.

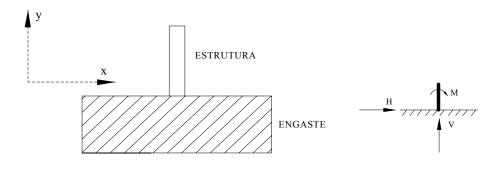
b) Apoio do 2º gênero, articulação ou rótula



Se, no apoio da Figura I-25.2, substituirmos os rolos por uma chapa presa completamente ao plano-suporte, conforme indica I-26.1, estaremos impedindo todas as translações possíveis, permanecendo livre apenas a rotação, assegurada pelo pino lubrificado indicado na figura. A este apoio, capaz de restringir todas as translações possíveis no plano, chamamos de apoio do 2º gênero. Ele é representado, esquematicamente, por uma das 2 formas indicadas em I-26.2 e I-26.3. Na direção das translações impedidas, aparecerão as reações H e V indicadas na figura.

c) Apoio do 3º gênero ou engaste.

Se ancorarmos a estrutura num bloco de dimensões que possam ser consideradas infinitas em presença das dimensões da estrutura, conforme indica a Figura I-27.1, na seção de contato entre ambos o bloco estará impedindo, por sua enorme rigidez, todos os movimentos possíveis da estrutura e dizemos então que ele engasta a estrutura. Um engaste será representado, esquematicamente, da forma indicada em I-27.2, aparecendo, na direção de cada um dos 3 movimentos impedidos (2 translações e 1 rotação), as reações de apoio H, V e M indicadas.



3.2.2 - Cálculo das reações de apoio

Definidos os apoios, o cálculo de suas reações é imediato, pois elas são forças (ou momentos) de ponto de aplicação e direção conhecidas e tais que equilibrem as cargas aplicadas na estrutura. Serão calculadas, então, a partir das equações de equilíbrio instituídas no item 3 deste capítulo. Os exemplos seguintes esclarecem.

Figura I-27

Exemplo: Calcular as reações de apoio para a estrutura da Figura I-28.

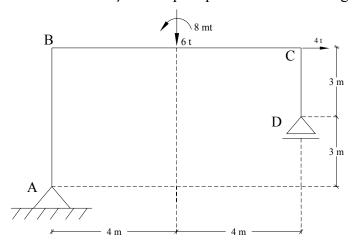


Figura I–28

Considerando apoio do 2º gênero em A e do 1º gênero em D, suas reações, nas direções que já conhecemos, e arbitrando para elas um sentido, conforme indica a Figura I-29, teremos, a partir das equações de equilíbrio I-10, que regem o equilíbrio de um sistema de forças coplanares:

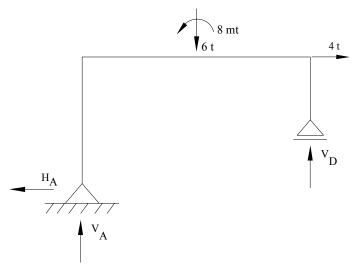


Figura I-29

$$\sum M_A = 0 \implies 8V_D + 8 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = 0 \therefore V_D = 5t$$

 $\sum Y = 0 \implies V_A + V_D = 6 \therefore V_A = 1t$
 $\sum X = 0 \implies H_A = 4t$

Os sinais positivos encontrados confirmam os sentidos arbitrados para as forças. Caso tivéssemos encontrado algum sinal negativo, isto quereria dizer que o módulo da reação seria encontrado, e o sentido correto inverso do arbitrado, não sendo necessário refazer qualquer cálculo.

Exemplo: Calcular as reações de apoio no engaste A da estrutura espacial da Figura I-30, cujas barras formam, em todos os nós, ângulos de 90°.

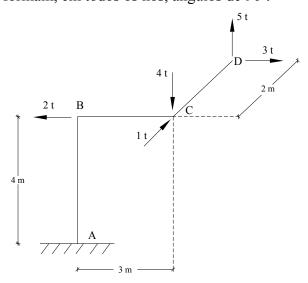


Figura I-30

Como um engaste impede todos os movimentos possíveis, nele aparecerão as reações de apoio indicadas na Figura I-31, que serão calculadas a partir do grupo de equações I.6 que regem o equilíbrio de um sistema de forças no espaço. Teremos:

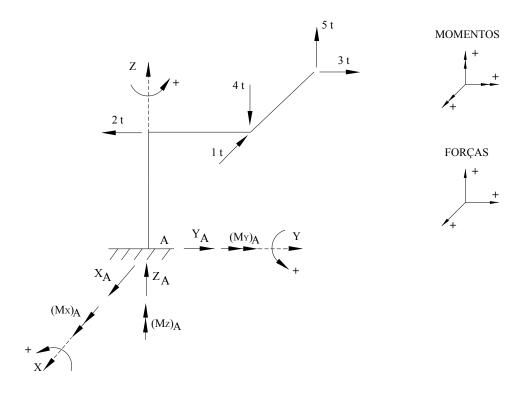
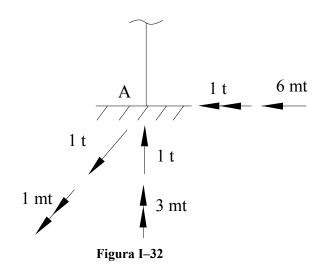


Figura I-31

As reações de apoio no engaste A são, então, as indicadas na Figura I-32.



3.3 - Estaticidade e estabilidade

Acabamos de ver que a função dos apoios é limitar os graus de liberdade de uma estrutura. Três casos podem então ocorrer:

a) Os apoios são em número estritamente necessário para impedir todos os movimentos possíveis da estrutura.

Neste caso, o número de reações de apoio a determinar é igual ao número de equações de equilíbrio disponíveis (isto é: número de incógnitas = número de equações), chegando-se a um sistema de equações determinado que resolverá o problema. (Foi o caso dos exemplos I.2 e I.3 anteriores.)

Diremos, então, que a estrutura é **isostática**, ocorrendo uma situação de equilíbrio estável.

b) Os apoios são em número inferior ao necessário para impedir todos os movimentos possíveis da estrutura.

Neste caso, evidentemente, teremos mais equações que incógnitas, chegando-se a um sistema de equações impossível, nos casos gerais. A estrutura será dita **hipostática** e será, então, **instável**.

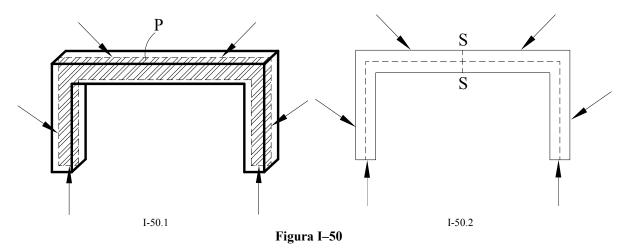
As estruturas hipostáticas são, então, inadmissíveis para as construções.

c) Os apoios são em número superior ao necessário para impedir todos os movimentos possíveis da estrutura.

Neste caso, teremos menor número de equações que de incógnitas, conduzindo a um sistema indeterminado. As equações universais da estática não serão, então, suficientes para a determinação das reações de apoio, sendo necessárias equações adicionais de compatibilidade de deformações. A estrutura será dita **hiperestática**, continuando o equilíbrio a ser **estável** (aliás, poderíamos dizer, um pouco impropriamente, que o equilíbrio é mais que estável).

4 - Estruturas planas carregadas no próprio plano

Seja a estrutura representada na Figura I-50.1, que admite um plano P de simetria, estando todas as cargas aplicadas nesse plano.



Destacando o traço da estrutura neste plano de simetria P, que contém o eixo da estrutura, obtemos o esquema representado na Figura I-50.2, em que a linha tracejada representa o eixo da estrutura. Trata-se, então, de um sistema de forças coplanares, caso particular de um sistema de forças no espaço.

Na estrutura plana, carregada no próprio plano, o momento Mz se confunde com o momento resultante M das forças situadas de um dos lados da seção em relação ao seu centro de gravidade e é preferível representá-lo por uma curva que indica seu sentido de rotação, conforme mostra a Figura I-51, ao invés de um vetor de dupla seta, pois a curva pertence ao plano das cargas, ao passo que o vetor de dupla seta seria a ele perpendicular, o que nos obrigaria a representar uma terceira dimensão perpendicular ao plano. O momento fletor será definido, como sempre, pelas fibras que está tracionando.

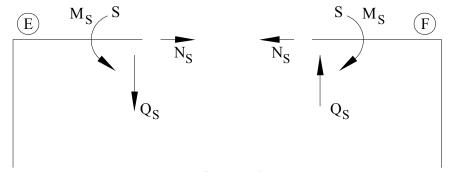


Figura I-51

O esforço cortante Qy se confunde, também, com o esforço cortante resultante na seção (pois Qz = 0) e representá-lo-emos, então, por Q. Sua convenção de sinais é a mesma do caso do espaço, mas, apenas para evitar o grau de liberdade na escolha da orientação dos eixos, orientamos o eixo y para cima (a direção x é sempre a do eixo da barra em estudo). Podemos, então, dizer que o esforço cortante é positivo quando, calculado pelas forças da esquerda, for voltado para cima, ou, quando calculado pelas forças da direita, for voltado para baixo.

Na Figura I-51, representamos os esforços simples, M, N, Q, que podem atuar numa seção S de uma estrutura plana. Notar que os esforços indicados como atuando na parte da direita (Figura I-51.2) foram calculados com as forças existentes na parte da esquerda e vice-versa.

Resumindo, podemos definir:

Esforço normal: é a soma algébrica das projeções das forças atuantes de um dos lados da seção na direção do eixo da estrutura (direção normal à seção);

Esforço cortante: é a soma algébrica das projeções das forças atuantes de um dos lados da seção na direção perpendicular ao eixo da estrutura;

Momento fletor: é a soma algébrica dos momentos das forças atuantes de um dos lados da seção em relação a seu centro de gravidade.

As convenções de sinais para esforço normal e esforço cortante já foram explicadas anteriormente e o momento fletor deve ser acrescido da informação de que fibras da seção ele traciona.

Exemplo: Obter os esforços simples atuantes nas seções S1 e S2 da estrutura da Figura I-55, submetida ao carregamento indicado.

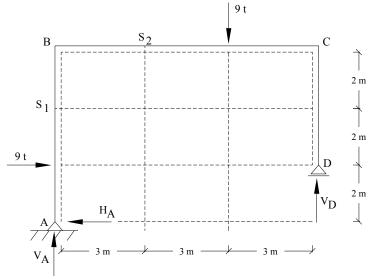


Figura I–55

Para obtermos os esforços simples, necessitamos inicialmente calcular as reações de apoio, indicadas na Figura I-55. A partir das equações de equilíbrio, temos:

$$\sum M_A = 0 \implies 9 \cdot 2 + 9 \cdot 6 - 9 V_D = 0 \therefore V_D = 8 t$$

 $\sum Y = 0 \implies V_A + V_D = 9 \therefore V_A = 1 t$
 $\sum X = 0 \implies H_A = 9 t$

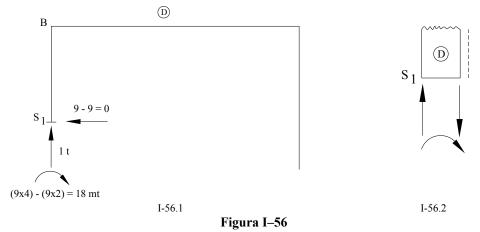
(Os sinais positivos encontrados indicam que os sentidos arbitrados para as reações na Figura I-55 estão corretos). Temos então:

a) Seção S₁

Calculando pelas forças à esquerda, temos o esquema indicado na Figura I-56.1, a partir do qual, obtemos:

$$N_{S1}$$
 = -1 t (compressão)
 Q_{S1} = 0
 M_{S1} = +18 mt

{o sinal (+) indica que as fibras tracionadas são as do lado pontilhado, conforme a Fig. I-56.2}.



Observação: Os esforços poderiam também ser calculados pelas forças da direita, obtendose os mesmos valores, evidentemente, conforme indica a Figura I-57.

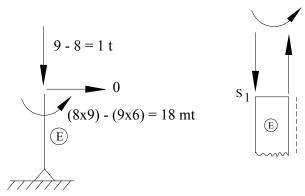


Figura I-57

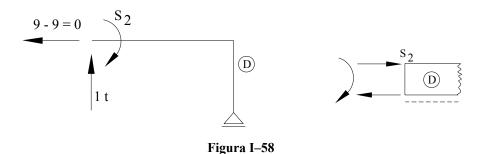
b) Seção S₂

Calculando pelas forças à esquerda temos, conforme o esquema da Figura I-58:

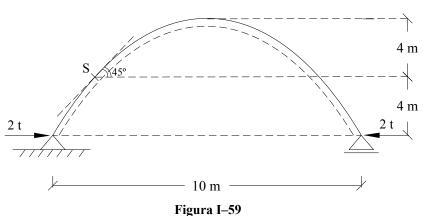
$$N_{S2} = 0$$

$$Q_{S2} = 1 t$$

$$M_{S2} = 21 mt$$



Exemplo: Calcular os esforços simples atuantes na seção S da estrutura da Figura I-59.



Estando a estrutura submetida a um carregamento auto-equilibrado, as reações de apoio são nulas (pois não é necessária força adicional alguma para equilibrar o carregamento atuante) e os esforços simples na seção S, calculados pelas forças à esquerda da seção valem, a partir do esquema da Figura I-60:

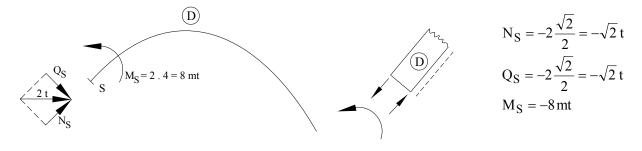


Figura I-60

Observação: Os sentidos dos esforços indicados na Figura I-60 estão corretos; os sinais são negativos em obediência às nossas convenções de sinais.

5 - Cargas

Até agora, só lidamos com cargas concentradas em nossos exemplos. Façamos, então, um estudo das diferentes leis de distribuição de cargas que podem ocorrer na análise estrutural.

5.1 - Cargas concentradas

Suponhamos uma roda de um caminhão descarregando uma reação P sobre uma ponte, conforme simboliza a Fig. I-61.

Esta reação P será descarregada ao longo da área de contato da roda com a ponte, que é a bastante pequena (caracterizada por a), mas não nula. Não haverá, então, a aplicação, rigorosamente falando, de uma carga concentrada P na estrutura; haverá, sim, a aplicação de uma carga distribuída, mas segundo uma área tão pequena que podemos considerá-la nula em presença de dimensões da estrutura.

As cargas concentradas são, então, uma forma aproximada de tratar cargas distribuídas segundo áreas tão pequenas (em presença das dimensões da estrutura), que podem ser consideradas nulas. Neste caso, o erro cometido, por esta razão, é absolutamente desprovido de significado e, portanto, inteiramente tolerável, tendo em vista a simplificação de trabalho de cálculo que ele possibilita.

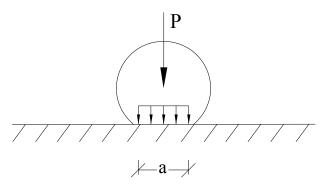


Figura I-61

5.2 - Cargas distribuídas

Suponhamos que a estrutura E, indicada na Fig. I-62, suporte o corpo C indicado, cujo peso específico é γ . Este peso introduzirá, evidentemente, um carregamento na estrutura E, carregamento este distribuído e contínuo, cuja taxa de distribuição vamos calcular.

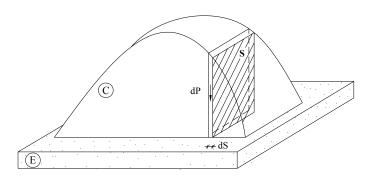


Figura I-62

O volume do corpo que carrega um trecho de comprimento "ds" da estrutura é Sds, sendo S a área da seção determinada em "C" por um plano perpendicular ao eixo da estrutura. O peso deste volume será: $dP = \gamma$ Sds e a taxa de distribuição de carregamento q(s) ao longo do eixo da estrutura vale:

$$q(s) = \frac{dP}{dS} = \gamma S$$

conforme indica a Fig. I-63, variando então proporcionalmente com a variação do valor da área "S".

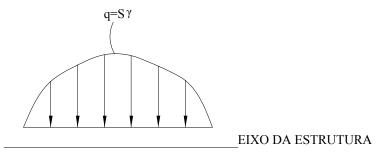


Figura I-63

Os tipos mais usuais de cargas distribuídas que ocorrem na prática são as cargas uniformemente distribuídas (S = constante) e as cargas triangulares (casos de empuxos de terra e de água, principalmente), indicadas na Fig. I-64.

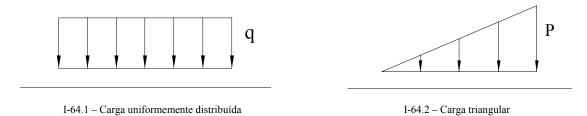


Figura I-64

Exemplo: Obter as reações de apoio para a estrutura da Fig. I-66.

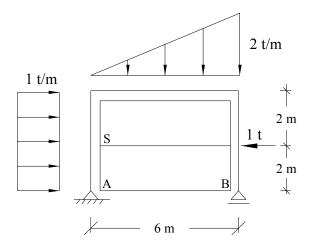


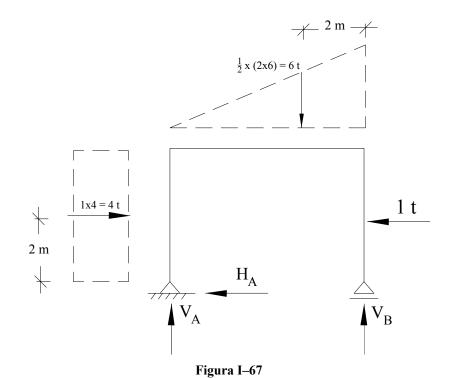
Figura I-66

Para obter as reações de apoio devemos, inicialmente, substituir as cargas distribuídas por suas resultantes (que produzem os mesmos efeitos estáticos que elas). Assim, temos, levando em conta as conclusões obtidas para carregamento distribuído neste item, a partir do esquema da Fig. I-67, as seguintes reações de apoio:

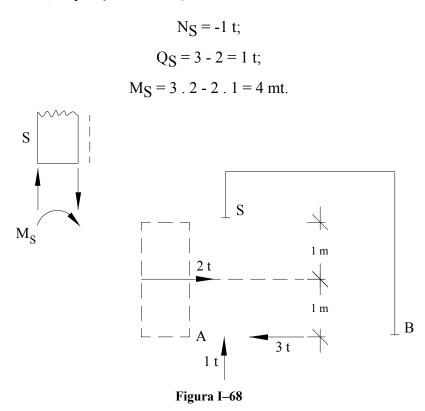
$$\sum M_A = 0 \implies 6V_B + 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = 0 \therefore V_B = 5 t$$

 $\sum Y = 0 \implies V_A = 6 - V_B = 1 t$
 $\sum X = 0 \implies H_A = 4 - 1 = 3 t$

(Os sinais positivos confirmam os sentidos arbitrados na Figura I-67).



Exemplo: Obter esforços simples atuantes na seção "S" da Fig. I-66. Entrando, por exemplo, com as forças atuantes à esquerda da seção e que se encontram indicadas na Fig. I-68, obtemos, substituindo o carregamento distribuído atuante nesse trecho por sua resultante (que vale 2 t, na posição indicada):



Vale ressaltar que, para fins de determinação dos esforços simples atuantes numa seção, devemos substituir por sua resultante, apenas, as cargas distribuídas atuantes de um dos lados da seção.

5.3 - Cargas-momento

Uma estrutura pode, além de estar solicitada por cargas-força (concentradas e ou distribuídas), estar solicitada por cargas-momento. As cargas-momento, cujo tratamento estático não apresenta dificuldade adicional alguma, ocorrem mais raramente como carregamento realmente atuante na estrutura, mas tem importância fundamental como ferramenta de resolução das estruturas hiperestáticas. Uma carga-momento é, evidentemente, caracterizada pelo seu módulo, direção, sentido e ponto de aplicação, conforme exemplifica o caso da fig. I-69.

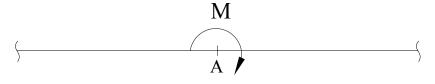
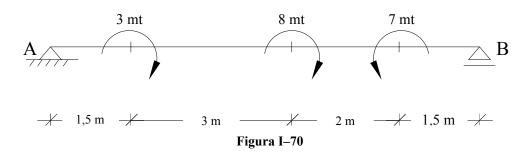


Figura I-69

Exemplo: Obter as reações de apoio para a estrutura da Fig. I-70.



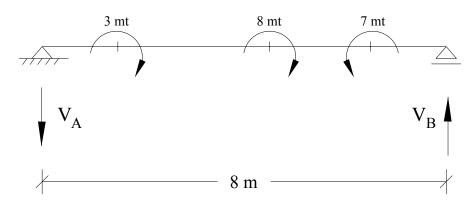


Figura I-71

Tem-se duas formas de encarar este problema.

A primeira consiste na utilização pura e simples das equações da Estática, conduzindo, a partir do esquema da Figura I-71 aos seguintes resultados:

$$\sum M_A = 0 \implies 8V_B + 7 - 3 - 8 = 0$$

 $\sum Y = 0 \implies V_A = V_B = 0.5 t$
 $\sum X = 0 \implies H_A = 0$

A outra forma - muito mais elegante - de encarar o problema é verificar que existe uma carga-momento resultante de (3 + 8 - 7) = 4 mt, que só pode ser equilibrada por um binário de sentido oposto, formado pelas reações verticais, cujos sentidos devem ser, então, os indicados na Figura I-71 e cujos módulos valem:

$$V_A = V_B = \frac{4}{8} = 0.5 t$$

ESTUDO DAS VIGAS ISOSTÁTICAS

1 - As equações fundamentais da estática

Seja a viga biapoiada da Figura II-1, submetida ao carregamento indicado:

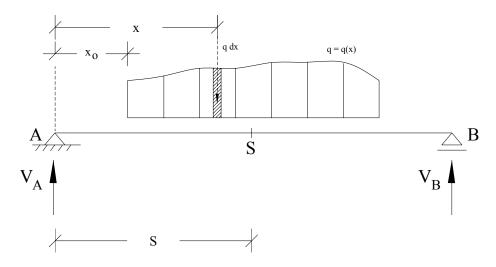


Figura II-1

Os esforços simples em S são dados por:

$$M_{S} = V_{A}S - \int_{x_{O}}^{s} q(s-x)dx = V_{A}S - S\int_{x_{O}}^{s} q dx + \int_{x_{O}}^{s} qx dx$$

$$Q_{S} = V_{A} - \int_{x_{O}}^{s} q dx$$

Derivando as expressões acima em relação à abscissa s que define a seção, obtemos, levando em conta que:

$$\frac{d}{ds} \left[S \int_{x_0}^{s} q \, dx \right] = s \frac{d}{ds} \int_{x_0}^{s} q \, dx + \int_{x_0}^{s} q \, dx = sq(s) + \int_{x_0}^{s} q \, dx$$

$$\frac{d}{ds} = \int_{x_0}^{s} q \, dx = sq(s)$$

$$\frac{d}{ds} = \int_{x_0}^{s} q \, dx = q(s)$$

Os valores:

$$\frac{dM_S}{ds} = VA - sq(s) - \int_{x_O}^{s} q \, dx + sq(s) = QS$$

$$\frac{dQ_{S}}{ds} = -q(s)$$

Em resumo temos:

$$\frac{dM_S}{ds} = QS \qquad II.1$$

$$\frac{dQ_S}{ds} = -q(s)$$
 II.2

Demonstramos, então que a derivada do momento fletor atuante numa seção S de uma viga reta, submetida a um carregamento a ela perpendicular, em relação à abscissa que define esta seção é igual ao esforço cortante nela atuante e que a derivada deste em relação a esta abscissa é igual ao valor da taxa de carga aplicada na seção S com sinal trocado. As igualdades (II.1) e (II.2) são as equações fundamentais da Estática, pois nos permitem obter os esforços solicitantes nas diversas seções da viga em função do carregamento q(x) atuante.

A partir de q(x) obteremos, então, as funções M_S e Q_S perpendicularmente ao eixo da viga, teremos seus assim chamados diagramas de momentos fletores e de esforços cortantes atuantes, que iremos agora estudar para os diversos tipos de carregamentos que ocorrem na prática.

Observações:

- 1 A partir de II.1, temos que o coeficiente angular da tangente ao diagrama de momentos fletores numa seção S é igual ao esforço cortante nela atuante.
- 2 A partir de II.2, temos que o coeficiente angular da tangente ao diagrama de esforços cortantes numa seção S é igual ao valor da taxa de carga atuante nesta seção com o sinal trocado.
- 3 Adotando-se como positivo o carregamento distribuído de cima para baixo (o que é usual), por integração das equações (II.1) e (II.2) obtemos que um esforço cortante é positivo quando, calculado pelas forças da esquerda, der para cima (ou, quando calculado pelas forças da direita, der para baixo) e que um momento fletor é positivo quando tracionar as fibras inferiores da viga. Tais são as convenções de sinais que adotaremos, embora dispensemos a colocação do sinal no diagrama de momentos fletores, como pleonástico, pois que o desenharemos sempre do lado das fibras por ele tracionadas.
- 4 Uma observação importante, sob o ponto de vista conceitual, é que, após carregada a viga, ela se deformará e os esforços estão sendo calculados para sua posição indeformada primitiva. Nosso estudo se baseia, então, nesta simplificação (de precisão excelente, pois as deformações das peças usuais são muito pequenas em presença de suas dimensões, e a estática que estamos desenvolvendo é, pois, a estática das pequenas deformações).

2. Vigas biapoiadas

2.1 - Carga concentrada

Seja a viga biapoiada da Fig. II.2, submetida a uma carga concentrada P, atuante na seção S.

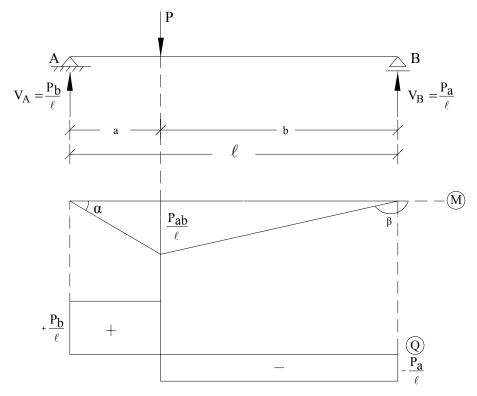


Figura II-2

Das equações de equilíbrio da estática ($\sum M_A = 0$ e $\sum M_B = 0$, por exemplo), obtemos as equações de apoio indicadas em II.2. Passemos ao traçado dos diagramas solicitantes.

Por força de (II.1) e (II.2), sabemos que, num trecho descarregado (q = 0), o diagrama de esforços cortantes será uma reta horizontal (pois dQ/ds = -q) e o diagrama de momentos fletores uma reta (pois $d^2M/ds^2=-q$).

Assim no trecho AS, bem como no trecho BS, o diagrama de momentos fletores será retilíneo.

Como sabemos que em A e em B os momentos são nulos, bastará conhecer seu valor em S para termos definido o diagrama M. Imediatamente, obtemos:

$$M_S = \frac{Pab}{\ell}$$

Quanto ao diagrama de esforços cortantes, será dado no trecho AS por $Q = + VA = Pb/\ell$ e, no trecho SB, por $Q = -VB = - Pa/\ell$. Na Seção S, ele sofrerá uma descontinuidade igual a $(Pa/\ell + Pb/\ell) = P$, valor da carga concentrada nela aplicada.

Observações:

a) O diagrama M possui um ponto anguloso em S, o que era de se esperar, pois, a partir de (II.1), temos $(dM/ds)S^{esq} = Q_S^{esq}$ e $(dM/ds)S^{dir} = QS^{dir}$ e, assim, $QS^{esq} = QS$ dir.

Na seção S, não se define esforço cortante; ele é definido à esquerda e à direita da seção sofrendo nela uma descontinuidade igual a P.

Podemos afirmar então que, sob uma carga concentrada, o diagrama de momentos fletores apresenta um ponto anguloso e o diagrama de esforços cortantes apresenta uma descontinuidade igual ao valor desta carga.

b) calculemos as integrais:

$$\int_{A}^{S} Q ds \quad e \quad \int_{A}^{B} Q ds$$

Temos:

$$\int_{A}^{S} Q ds = \frac{Pb}{\ell} a = M_{S};$$

$$\int\limits_{A}^{B}Q\,ds=\frac{Pb}{\ell}a-\frac{Pa}{\ell}b=0=M_{B}\text{ , o que \'e evidente em face de II.1.}$$

Os valores acima ilustram a obtenção do diagrama de momentos fletores a partir do diagrama de esforços cortantes.

A condição
$$\int\limits_{A}^{S}Q\,ds=0$$
 , permite a verificação do equilíbrio da viga.

c) Calculemos os valores de $tg\alpha$ e $tg\beta$

$$tg\alpha = \frac{Pb}{\ell} = Q_{trecho AS}$$

$$tg\beta = \frac{Pa}{\ell} = Q_{trecho\,SB}$$

Os valores acima ilustram a obtenção do diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores.

d) O caso de mais de uma carga concentrada será resolvido de maneira inteiramente análoga ao caso de uma só carga concentrada, conforme esclarecerá o exemplo a seguir.

Exemplo: Obter os diagramas solicitantes para a viga da Figura. II-3.

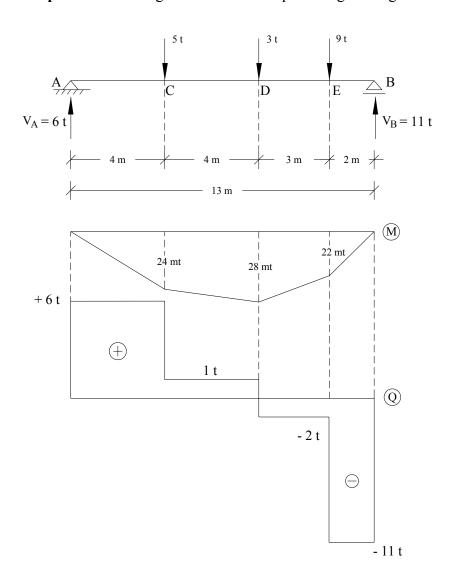


Figura II-3

Das equações da Estática, obtemos as reações de apoio:

$$\sum M_B = 0$$

$$V_A = \frac{1}{13} (5.9 + 3.5 + 9.2) :: V_A = 6t$$

$$\sum \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

$$V_B = (5+3+9)-6=11 t$$

As ordenadas necessárias à determinação do diagrama M são:

$$M_C = 6$$
 , $4 = 24 \ mt$ $M_D = 6$, 8 - 5 , $4 = 28 \ mt$ $M_E = 11$, $2 = 22 \ mt$

Os esforços cortantes valem:

$$Q_{A-C} = +6t$$
 $Q_{C-D} = 6 - 5 = +1 t$
 $Q_{D-E} = 6 - 5 - 3 = -2 t$
 $Q_{E-B} = 6 - 5 - 3 - 9 = -11 t.$

2.2 - Carga uniformemente distribuída

Seja a viga biapoiada da Fig. II-4, submetida a uma carga uniformemente distribuída q.

Sendo as reações de apoio as indicadas na figura, teremos os seguintes esforços simples numa seção genérica S:

$$M_{S} = \frac{q\ell x}{2} - \frac{qx^{2}}{2} = \frac{q\ell^{2}}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^{2}}{\ell^{2}}\right)$$

$$Q_{S} = \frac{q\ell}{2} - qx$$

$$V_{A} = \frac{q\ell}{2}$$

$$V_{A} = \frac{q\ell}{2}$$

$$V_{B} = \frac{q\ell}{2}$$

$$M_{MAX} = \frac{q\ell^{2}}{8}$$

Figura II-4

O diagrama de esforços cortantes será uma linha reta, que fica determinada pelos seus valores extremos, correspondentes:

$$ax = 0$$
 e $ax = 1$, que são $Q_A = \frac{q\ell}{2}$ e $Q_B = -\frac{q\ell}{2}$

(Estes valores poderiam ser obtidos diretamente a partir das reações de apoio).

O diagrama de momentos fletores será dado por uma parábola do 2° grau, passando por zero em A e B e passando por um máximo em x = 1/2 (seção onde Q = dM/dx = 0), de valor:

$$M_{\text{máx}} = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{q\ell^2}{8}$$

Para obtenção dos valores de M numa seção genérica, empregaremos a equação

$$M = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right) = \frac{q\ell^2}{2} \omega_R$$

Sendo:

$$\omega_R = \varepsilon - \varepsilon^2$$

Onde:

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{X}}{\ell}$$

Observações:

a) Temos
$$\int_{A}^{B} Q dx = 0$$
, o que verifica o equilíbrio da viga.

- b) Sendo a taxa de carregamento constante (grau zero), o diagrama de esforços cortantes é retilíneo (grau um) e o de momentos fletores é parabólico (grau 2), conforme já sabíamos por (II.1) e (II.2). Podemos afirmar, então, que, sob carga uniformemente distribuída, o diagrama de momentos fletores é parabólico do 2º grau e o diagrama de esforços cortantes é retilíneo.
- c) Apresentamos, na Fig. II-5, uma construção geométrica que nos dá excelente precisão no traçado do diagrama de momentos fletores. Sendo $M_{M1} = ql^2/8$, marcamos $M_1M_2 = MM_1$. Dividimos os segmentos AM_2 e BM_2 em 4 partes iguais; obtemos os pontos I, II, III, I', II', e III', que, ligados alternadamente, nos dão tangentes externas à parábola que é então facilmente obtida. Se quisermos aumentar nossa precisão, dividimos AM_2 e BM_2 em 8, 16, ... partes ao invés de 4, repetindo o mesmo tipo de traçado.

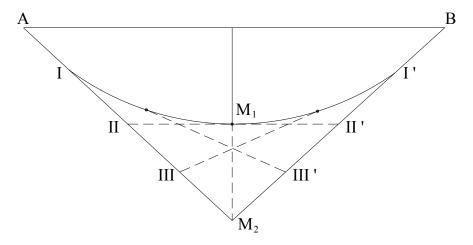


Figura II-5

d) Um valor notável no diagrama de momentos fletores é o valor para as seções com $\epsilon=0,25$ e $\epsilon=0,75,$ que é:

$$M = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{q\ell^2}{8} = \frac{3}{4} M_{m\acute{a}x}$$

e) É usual, no caso de traçado de diagramas de momentos fletores com cargas uniformemente distribuídas, cotar apenas o valor

$$\frac{q\ell^2}{8}$$

f) Calculemos a inclinação do diagrama de esforços cortantes. Temos

$$Temos, tg\alpha = \frac{-\frac{q\ell}{2} - \frac{q\ell}{2}}{\ell} = -q, \ conforme \ II.2 \, .$$

ESTUDO DOS QUADROS ISOSTÁTICOS PLANOS

1 - Quadros simples

Existem quatro tipos fundamentais de quadros isostáticos planos, aos quais chamamos quadros simples, quando ocorrem isoladamente e que, associados entre si, da mesma forma com que associamos vigas simples para constituir as vigas Gerber, formam os assim chamados quadros compostos.

São os seguintes os tipos estáticos de quadros simples isostáticos:

1.1 - Quadro biapoiado

Seja o quadro da Fig. III-1. Para obtermos as reações de apoio H_A, V_A e V_B dispomos das três equações universais da estática no plano. Trata-se, pois, de estrutura isostática. Conhecidas as reações de apoio, passemos à obtenção dos diagramas solicitantes.

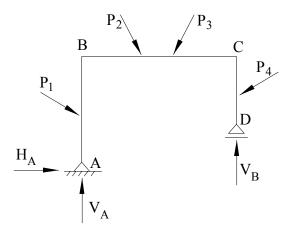


Figura III-1

Estamos diante de um problema novo, que faremos recair em problema já conhecido (resolução de vigas biapoiadas), da maneira seguinte.

Rompendo o quadro em seus nós intermediários B e C, podemos destacar, uma das outras, as barras que o constituem, desde que apliquemos nesses nós, em cada uma das barras, os esforços simples neles atuantes, que manterão o equilíbrio de cada barra AB, BC e CD, conforme indica a Fig. III-2.1.

Analisemos cada uma dessas barras. Seja, por exemplo, a barra BC, indicada na Fig. III-2.1, submetida ao carregamento em equilíbrio constituído por H_B, V_B, M_B, P₂, P₃, H_C. V_C. M_C. Como estas cargas estão em equilíbrio, podemos encarar, por exemplo, HB, VB e VC como sendo as forças que equilibram as demais cargas atuantes, e a barra BC pode então ser considerada como uma viga biapoiada. Esta viga é submetida ao carregamento que lhe está diretamente aplicado, acrescido de cargas-momento em suas extremidades, iguais aos momentos fletores atuantes nestas seções, e de uma carga horizontal no apoio do 1º gênero, igual ao esforço normal atuante nesta seção. A igual conclusão chegaríamos para as demais barras e o estudo do quadro recai, então, no estudo das três vigas biapoiadas AB, BC e CD com os carregamentos indicados na Fig. III-2.2.

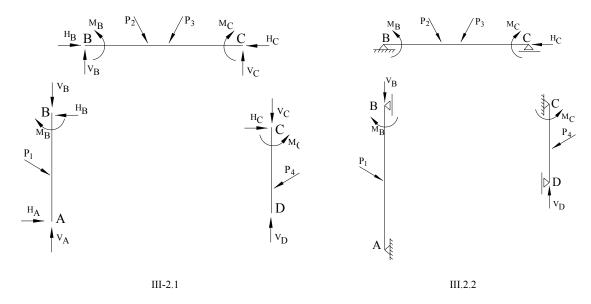


Figura III-2

As conclusões tiradas para este caso podem ser extrapoladas para todos os demais. E podemos, então, afirmar que, para se traçar o diagrama dos momentos fletores atuantes num quadro, basta marcarmos os momentos fletores atuantes em seus nós, ligá-los por uma linha reta tracejada, a partir da qual penduramos os diagramas de viga biapoiada devidos aos carregamentos atuantes sobre cada uma das barras que constituem o quadro em análise.

Os diagramas são marcados, como no caso das vigas, perpendicularmente ao eixo de cada barra.

A obtenção dos diagramas de esforços cortantes e esforços normais é imediata, a partir do conhecimento das reações de apoio.

O exemplo a seguir esclarece.

Exemplo: Obter os diagramas solicitantes para o quadro da Figura III-3.

Substituindo o carregamento distribuído por sua resultante, indicada em pontilhado na Fig. III-3, passemos à obtenção das reações de apoio:

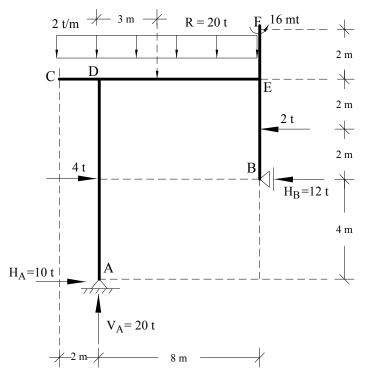


Figura III-3

Conhecidas as reações de apoio, estamos em condições de traçar os diagramas solicitantes, que começaremos pelo diagrama de momentos fletores. Os momentos fletores atuantes nos nós intermediários valem:

a) Nó D

- Para a barra AD: $M_{\rm D}^{\, barra \,\, AD}$ = 10 . 8+4 . 4 = 96 mt, tracionando as fibras da esquerda.
 - Para a barra CD: $M_D^{\text{barra CD}} = 2 \cdot 2^2/2 = 4 \text{ mt}$, tracionando as fibras superiores.
 - Para a barra DE:

Para a barra DE, podemos obter o momento fletor atuante em D a partir de sua definição, isto é, entrando com as forças atuantes num dos lados da seção (por exemplo, entrando com as forças atuantes à esquerda), obtemos:

$$M_D^{\text{barra DE}} = 10.8 + 4.4 + \frac{2.2^2}{2} = 100 \,\text{mt}$$

(tracionando as fibras superiores) ou podemos, o que é muito mais prático, no caso, obter seu valor a partir do equilíbrio do nó D, conforme se segue.

Rompendo todas as barras que concorrem no nó D e aplicando os momentos fletores nelas atuantes, eles têm que estar em equilíbrio, pois a estrutura o está. Temos então, o esquema da Fig. III-4, a partir do qual obtemos:

 $M_D^{\text{barra DE}} = 100 \text{ mt}$ (tracionando as fibras superiores).

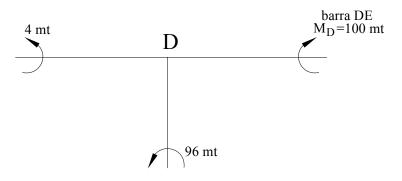


Figura III-4

b) Nó E

- Para a barra EF: $M_E^{\text{barra EF}} = 16 \text{ mt}$, tracionando as fibras da direita.
- Para a barra BE: ${M_E}^{barra\; BE}$ = 12 . 4 + 2 . 2 = 52 mt, tracionando as fibras da direita.
- Para a barra DE, temos, a partir do equilíbrio do nó E, conforme indica a Figura III-5: $M_E^{barra\ DE} = 36\ mt$, tracionando as fibras superiores.

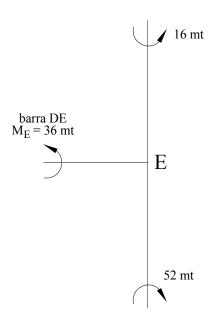
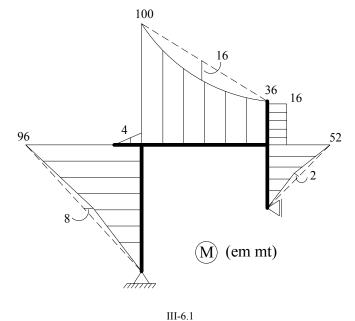


Figura III–5

Marcando os valores obtidos para os nós, temos definidas as linhas de fechamento, a partir das quais penduramos os diagramas de viga biapoiada, obtendo então, o diagrama final indicado na Figura III-6.1.

A obtenção dos diagramas de esforços cortantes e de esforços normais é imediata, a partir do carregamento e das reações de apoio indicadas na Figura III-3, chegando-se aos valores indicados nas Figuras III-6.2 e III-6.3, respectivamente.



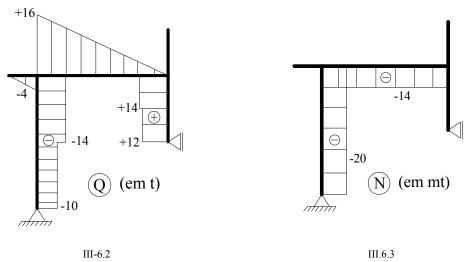


Figura III-6

Observações:

- a) Os diagramas de momentos fletores nas barras verticais poderiam, também, ser obtidos calculando seus valores nas seções de aplicação das cargas concentradas (4 t para a barra AD e 2 t para a barra BE), ligando-os a zero nos apoios e aos valores obtidos nos nós (96 mt para o nó D e 52 mt para o nó E).
- b) Para o traçado do diagrama de esforços cortantes, obedecemos às mesmas convenções de sinais adotados no caso das vigas .
- c) A área do diagrama de esforços cortantes vale: $SQ = -10 \cdot 4 14 \cdot 4 + 16 \cdot 4 + 14 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = +16$ mt, valor da carga-momento aplicada (sentido anti-horário).
- d) No traçado do diagrama de esforços normais, é indiferente o lado para o qual marcamos os valores, interessando apenas o sinal (positivo se o esforço é de tração e negativo no caso de compressão).

- e) A fim de evitar confusão com as linhas que definem o eixo do quadro e com linhas auxiliares usadas para o traçado dos diagramas, pode-se hachurar, se julgado útil para maior clareza, a área compreendida entre o diagrama final e o eixo do quadro.
- f) Notar, no diagrama de momentos fletores, os pontos angulosos nos pontos de aplicação e nos sentidos das cargas concentradas aplicadas (inclusive as reações de apoio).

1.2 - Quadro engastado e livre

Seja o quadro da Fig. III-7. Suas três reações de apoio H_A, V_A, M_A são imediatamente obtidas empregando-se as três equações universais da estática e, a partir daí, chegamos, sem maiores problemas, a seus diagramas solicitantes, conforme ilustra o exemplo a seguir.

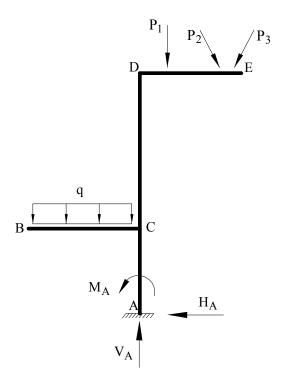


Figura III-7

Exemplo: Obter os diagramas solicitantes para o quadro da Fig. III-8. As reações de apoio valem:

$$\sum X = 0 \implies H_A = 1 t$$

$$\sum Y = 0 \implies V_A = 8 t$$
 $\sum M_A = 0 \implies M_A + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \therefore M_A = 1 mt$

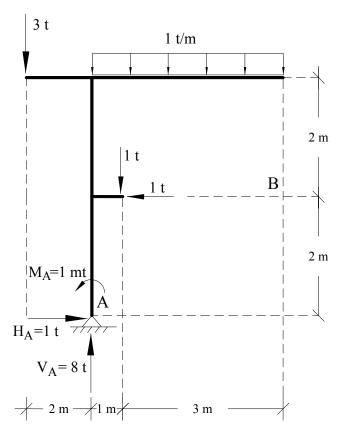
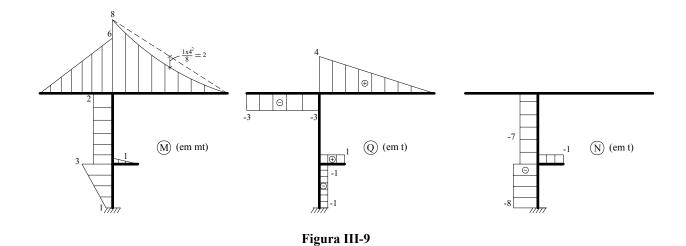


Figura III-8

Os diagramas solicitantes são os indicados na Fig. III-9.



Observações:

- a) Não indicamos cálculo auxiliar algum, pois todos os valores necessários ao traçado dos diagramas podem ser obtidos de cabeça, no caso.
- b) A área do diagrama de esforços cortantes vale, no caso, 1 mt, valor da reação-momento no engaste (sentido anti-horário).

1.3 - Quadro triarticulado

Seja o quadro triarticulado (articulações em A, G e B) da Fig. III-10. Para determinar suas 4 reações de apoio $(H_A, \ V_A, \ H_B \ e \ V_B)$, dispomos das três equações universais da estática no plano e, por haver uma rótula em G (o que indica que em G só há transmissão de forças, não havendo transmissão de momentos), temos uma quarta equação indicando que o momento fletor em G deve ser nulo.

Obtidas as reações de apoio, o problema está resolvido, levando-se em conta o que já estudamos nos itens anteriores.

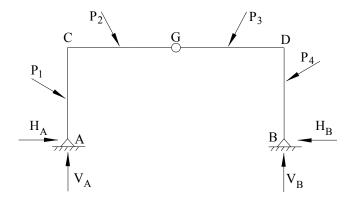


Figura III-10

Observação: Caso os dois apoios do 2° gênero e a rótula intermediária estejam alinhados, a estrutura será hipostátic. Como exemplo, vejamos o quadro da Fig. III-11. Para que tenhamos satisfeita a condição do momento fletor ser nulo em G, as reações de apoio H_A e V_A em A e H_B e V_B em B devem ter suas resultantes R_A e R_B segundo a direção da reta AB, conforme esquematizado na figura.

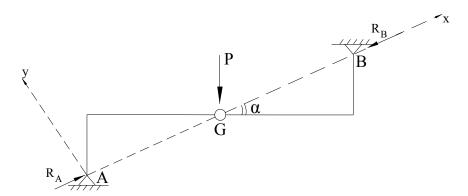


Figura III-11

Calculemos a soma das projeções de todas as forças na direção perpendicular à reta AB: ela valerá $\sum Y = -P \cos \alpha$ (e não zero, como deveria valer, caso houvesse o equilíbrio). Concluímos então que, nestas circunstâncias, o equilíbrio é impossível e estamos, por conseguinte, diante de uma estrutura hipostática.

Podemos afirmar, pois, que um quadro triarticulado é uma estrutura isostática, desde que suas 3 rótulas não estejam alinhadas.

Exemplo: Obter os diagramas solicitantes para o quadro da Fig. III-12:

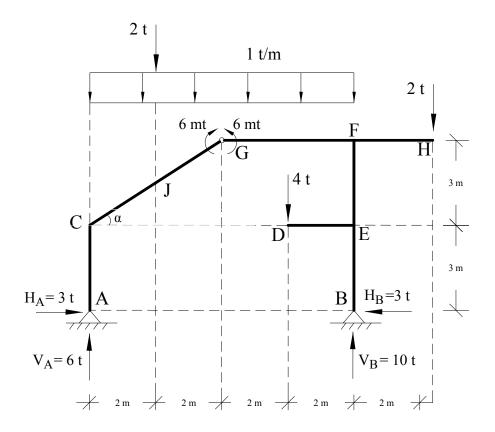


Figura III-12

As reações de apoio são dadas por

$$\sum M_B = 0 \implies 8 V_A = 2 \cdot 6 + 8 \cdot 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \quad V_A = 6 \text{ t.}$$

 $\sum Y = 0 \implies V_B = 2 + 2 + 4 + 8 \cdot 1 - V_A = 10 \text{ t.}$

$$M_G=0$$
 , pelas forças da esquerda: 6 . 4 + 6 - 6HA - 2 . 2 - 4 . 1 . 2 = 0 \therefore HA = 3 t.
$$\Sigma X=0 \implies H_B=3 \ t.$$

Passemos à obtenção do diagrama de momentos fletores. Os momentos fletores atuantes nos nós do quadro valem:

Nó C:

 $M_C = 3 \cdot 3 = 9$ mt, tracionando as fibras externas;

Nó G:

 $M_G^{esq} = M_G^{dir} = 6$ mt, valor das cargas-momento aplicadas, tracionando as fibras externas; Observação: Em G temos, evidentemente $M_G = 0$; o diagrama sofre descontinuidades de 6 mt à esquerda e à direita da rótula;

Nó F:

 $M_F^{\text{barra FH}} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ mt}$, tracionando as fibras externas;

 $M_F^{\text{barra EF}} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 10 \text{ mt}$, tracionando as fibras externas;

 $M_F^{barra\ GF}=14$ mt, tracionando as fibras externas, obtido a partir dos valores anteriores, por equilíbrio do nó E, conforme mostra a Figura III-13;

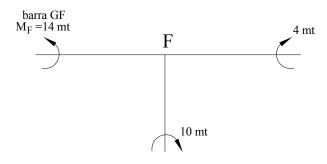


Figura III-13

Nó E:

 $M_E^{\text{barra DE}} = 8 \text{ mt}$, tracionando as fibras superiores;

 $M_E^{\text{barra BE}} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ mt}$, tracionando as fibras externas;

 $M_E^{barra\ EF}=1$ mt, tracionando as fibras externas, obtido a partir dos valores anteriores, por equilíbrio do nó E, conforme mostra a Fig. III-14

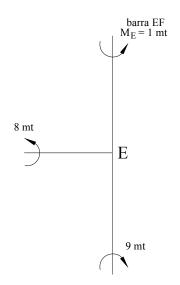


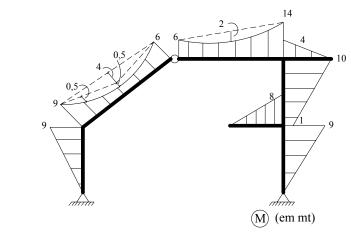
Figura III-14

Marcando os valores obtidos para os nós, temos definidas as linhas de fechamento, a partir das quais penduramos os diagramas de viga biapoiada obtendo, então, o diagrama indicado na Fig. III-15.1.

As cotas básicas para o traçado dos diagramas de esforços normais podem ser obtidas de cabeça, a não ser no trecho inclinado CG, onde valem:

$$Q_C^{barra} CG = 6 \cos \alpha - 3 \sin \alpha = 6 \cdot 0.8 - 3 \cdot 0.6 = 3 t$$
 $N_C^{barra} CG = -6 \sin \alpha - 3 \cos \alpha = -6 t$
 $Q_j^{esq} = 4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha = 1.4 t$
 $Q_j^{dir} = 1.4 - 2 \cos \alpha = -0.2 t$
 $N_j^{esq} = -4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha = -4.8 t$
 $N_j^{dir} = -4.8 + 2 \sin \alpha = -3.6 t$
 $Q_G^{barra} CG = -3 \sin \alpha = -1.8 t$
 $N_G^{barra} CG = -3 \cos \alpha = -2.4 t$

Os diagramas estão desenhados, a partir desses valores, nas Figuras III-15.2 e III-15.3.



III-15.1

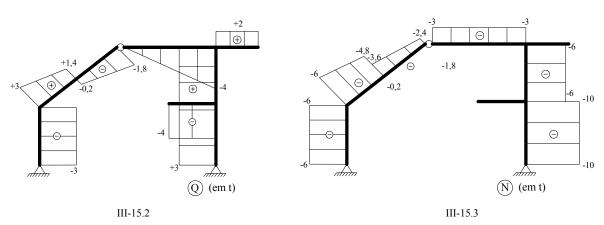


Figura III-15

Observações:

a) Notar como a escolha adequada das equações de equilíbrio, bem como de sua ordem de emprego facilitou o trabalho algébrico de obtenção das reações de apoio. Em qualquer outro caso, o leitor deve guardar esta idéia em mente, pois esta escolha adequada tornará a resolução da estrutura muito menos trabalhosa e, conseqüentemente, muito menos passível de erros numéricos.

b) O diagrama de momentos fletores de viga biapoiada a ser superposto à linha de fechamento na barra CG, em vista às conclusões tiradas anteriormente, tem seu valor, em J, igual a $ql^2/8 + Pab/l = 1 \times 4^2/8 + 2 \times 2 \times 2/4 = 4$ mt. Este valor será marcado evidentemente na perpendicular à barra CG, a partir da linha de fechamento.

1.4 - Quadro biapoiado, com articulação e tirante (ou escora)

Seja o quadro da Fig. III-16.1, biapoiado em A e B, com uma rótula em G e com uma barra CD descarregada, rotulada em suas extremidades.

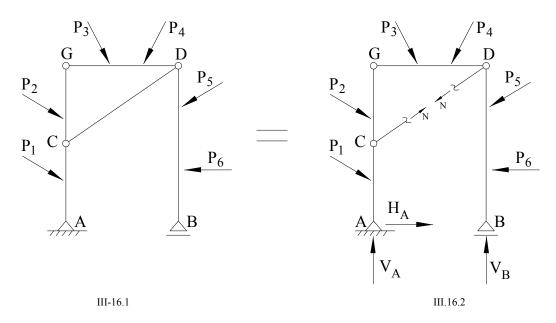


Figura III-16

Se a barra CD é descarregada e rotulada nas extremidades, ela tem, em toda a sua seção, M = Q = 0, podendo estar submetida, apenas, a um esforço normal constante (no caso de ser de tração, a barra será denominada tirante e, no caso de ser de compressão, será dita uma escora). Nada se alterará, então, sob o ponto de vista estático, se rompermos a barra CD, substituindo-a por um par de esforços normais N, de sentidos opostos e aplicados no quadro AGDB em cada uma das extremidades C e D da barra CD, conforme indica a Fig. III-16.2.

Para resolver a estrutura precisaremos, por conseguinte, conhecer os valores das reações de apoio VA, HA e VB e do par de forças N, num total de quatro incógnitas. Sendo igual o número de equações de que dispomos (três equações universais da estática e mais equação de momentos fletor nulo na rótula), trata-se de uma estrutura isostática.

Obtidas as reações de apoio e o valor de N, o traçado dos diagramas solicitantes será imediato, a partir do que estudamos nos tópicos anteriores. O exemplo à frente esclarecerá.

Observação: Dependendo da posição relativa dos vínculos, o quadro biapoiado, com articulação e tirante, pode se tornar hipostático, conforme é o caso da estrutura da Fig. III-17, incapaz de absorver forças horizontais atuantes no trecho GB (pois acarretaria o aparecimento de momentos fletores na rótula, o que é impossível). Deve-se fazer, pois, neste sentido, uma análise de cada caso.

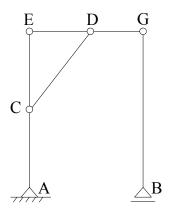
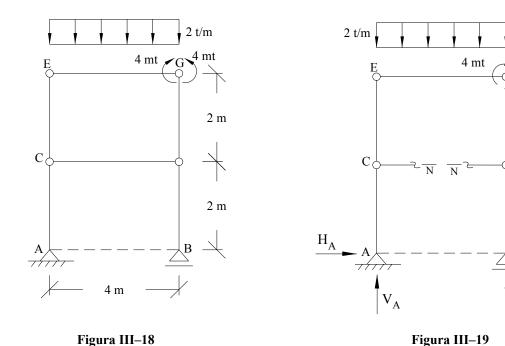


Figura III-17



Exemplo: Obter os diagramas solicitantes para o quadro da Fig. III -18

Temos, para obtenção das reações de apoio e do esforço normal atuante na barra CD, o esquema da Fig. III-19, a partir do qual obtemos:

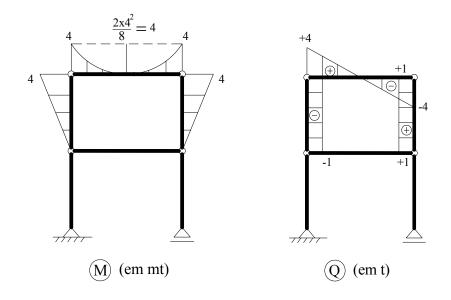
$$\sum X = 0 \implies H_A = 0$$

$$\sum MB = 0 \implies 4 V_A = 2 . 4 . 2 :: V_A = 4 t$$

$$\sum Y = 0 \implies V_B = 8 - V_A = 4 t$$

MG = 0, pelas forças da direita: 2N - 4 = 0 : N = 2 t

Conhecidos estes valores, obtemos, sem maiores problemas, os diagramas solicitantes traçados na Fig. III-20.



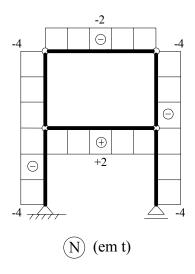
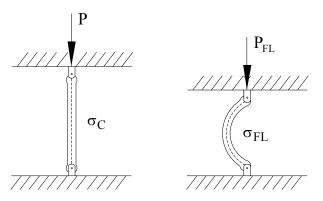


Figura III-20

ELEMENTOS COMPRIMIDOS AXIALMENTE

Flambagem

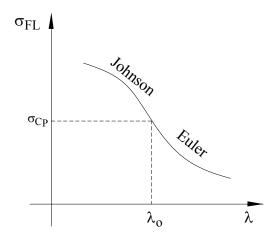
Uma barra submetida a uma carga axial P pode sofrer um encurvamento lateral, chamado flambagem. A carga, com a qual se inicia este fenômeno, é a carga de flambagem P_{FL} e a tensão correspondente é a tensão de flambagem σ_{FL} .



Devido ao formato, certas barras flambam com mais facilidade que outras. Este fato é expresso por um número "λ" (lâmbida), chamado índice de esbeltez.

Assim, uma barra mais esbelta (λ grande) flamba com menor tensão, enquanto que uma outra barra, menos esbelta (λ pequeno), flamba com uma tensão maior.

Experimentalmente, verificou-se que σ_{FL} varia com λ conforme o gráfico:



Onde σ_{CP} = tensão de proporcionalidade à compressão e λ_o índice de esbeltez correspondente a σ_{CP} .

Neste gráfico nota-se que:

- 1) uma barra com $\lambda > \lambda_o$ (muito esbelta) flamba com uma tensão σfl abaixo da tensão de proporcionalidade σcp
- 2) uma outra barra com λ < λ o (pouco esbelta) flamba somente com uma tensão σ_{FL} acima de σ_{CP} . Neste caso pode ocorrer inclusive a ruptura do material antes da barra flambar

No segundo caso, σ_{FL} é calculada pelas fórmulas de Johnson, Tetmajer ou Rankine.

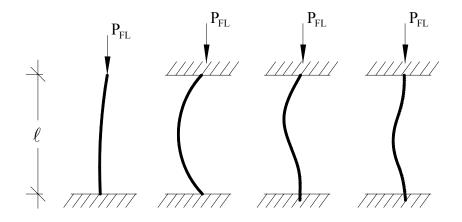
No primeiro caso, o cálculo de σ_{FL} ou P_{FL} é feito com a fórmula de Euler:

$$P_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell_0^2} \qquad \qquad \sigma_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell_0^2 \cdot S}$$

Convém frisar que esta fórmula é válida somente para $\lambda > \lambda_0$

E = módulo de elasticidade normal

 $J_{min} = momento \ de \ inércia \ mínimo$ $S = \'area \ de \ sec\~ção$ $\ell_o = comprimento \ de \ flambagem, \ onde \ \ell_o \ depende \ do \ comprimento \ real \ da \ barra \ e \ seus \ vínculos \ externos:$



O índice de esbeltez λ , é dado pela relação:

$$\lambda = \frac{\ell_o}{\rho_{min}}$$

Onde: $\rho_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{S}} = raio de giração mínimo$

Levando estes valores para a fórmula de Euler, tem-se:

$$\sigma_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell_o^2 \cdot S} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \rho^2}{\ell_o^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Fazendo λ = λo resulta $\,\sigma_{FL}\!=\,\sigma_{CP}\,que$ é o limite de validade da fórmula de Euler.

Exemplo: Calcular o λ_0 para um aço com as seguintes características: $E = 2.100.000 \text{ kg/cm}^2 \text{ e } \sigma_{CP} = 2100 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_{CP} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} e \lambda_o = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{CP}}} = \pi \sqrt{\frac{2100000}{2100}} = 100$$

Valores de λ ₀	
105	aço doce
89	aço duro
80	ferro fundido
100	pinho

Problemas:

1 - Calcular o diâmetro de uma barra de aço doce de comprimento $\ell=150$ cm, articulada nas suas extremidades e submetida à compressão axial $P=8\,000$ kg.

$$P_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell_0^2}$$

 $E = 2.200.000 \text{ kg/cm}^2 \text{ (tabela)}$

$$P_{FL} = n P = 5 \cdot 8000 = 40.000 \text{ kg}$$

$$J_{min} = 0.0491 d^4 \text{ (tabela)}$$

$$\ell_0 = \ell = 150 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{c|c} P & \stackrel{d}{\longrightarrow} P \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$40000 = \frac{\pi^2 \cdot 2200000 \cdot 0,0491d^4}{150^2} \therefore d = \sqrt[4]{\frac{40000 \cdot 150^2}{\pi^2 \cdot 2200000 \cdot 0,0491}} = 5,4 \text{ cm}$$

Verificação de λ:

$$\rho_{min} = \frac{d}{4} = \frac{5.4}{4} = 1.35 \, \text{cm} \, (\text{tabela})$$

$$\lambda = \frac{\ell_{o}}{\rho_{min}} = \frac{150}{1.35} = 111.$$

Como λ é maior que 105, a fórmula de Euler pode ser aplicada.

2 - Escolher um pilar I, de 4 m de altura, destinado a suportar uma carga de 20t. Admitir extremidade inferior engastada e superior articulada.

$$P_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell_0^2} \qquad \begin{cases} \ell_0 = 0.75.400 = 300 \text{ cm} \\ P_{FL} = 5.20000 = 100000 \text{ kg} \\ E = 2000000 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

84

$$J_{min} = \frac{P_{FL} \cdot \ell_o^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{10000.300^2}{\pi^2 \cdot 2000000} = 456.4 \text{ cm}^4$$

Em tabelas apropriadas pode-se chegar, por exemplo, ao perfil I 12" x 5 - 1/4" x 29/64".

Verificação de λ:

$$\lambda = \frac{\ell_o}{\rho_{min}} = \frac{300}{2,74 \text{ (tab)}} = 109 > \lambda_o \quad \therefore \text{ satisfaz}$$

3 - Calcular o comprimento máximo que pode ter uma cantoneira L 2" x 2" x 1/4", de uma tesoura metálica carregada axialmente à compressão com uma carga de 2.000 kg.

$$P_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{\ell_0^2} \begin{cases} E = 2000000 \, kg / cm^2 \\ \ell_0 = 0.5 \ell \\ J_{min} = S\rho^2 = 6.06.0.99^2 = 5.9 \, cm \quad (eixo \, 3-3, tabela) \\ P_{FL} = 5.2000 = 10000 \, kg \end{cases}$$

$$10000 = \frac{\pi^2 .2000000.5,0}{(0,5\ell)^2} \quad \therefore \quad \ell = \sqrt{\frac{\pi^2 .2000000.5,0}{0,5^2 .10000}} = 218 \,\text{cm}$$

Verificação de λ:

$$\lambda = \frac{\ell_o}{\rho_{min}} = \frac{0.5.218}{0.99} = 110 > \lambda_o \quad \therefore \quad \text{satisfaz}$$

DIMENSIONAMENTO DE COLUNAS OU PILARES DE ALVENARIA

O dimensionamento de colunas ou pilares de alvenaria, para considerar o efeito flambagem, normalmente é feito reduzindo-se a tensão admitida nos cálculos, em função da esbeltez destes elementos.

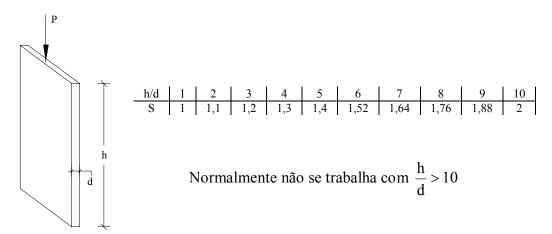
$$\sigma'_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{S}$$

Onde:

S = coeficiente de correção dependente da esbeltez;

 σ'_{adm} = tensão admissível corrigida para flambagem;

 σ_{adm} = tensão admissível da alvenaria.



Exemplo: Que carga pode suportar um pilar de alvenaria de tijolos maciços, adm = 10 kgf/cm² que tem seção 20 cm x 25 cm e 2 m de altura.

$$\frac{h}{d} = \frac{200 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 10$$

$$\sigma'_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{S} = \frac{10 \text{ kgf/cm}^2}{2} = 5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \therefore P = \sigma. A \implies P = 5 \text{ kgf/cm}^2.20 \text{ cm.} 25 \text{ cm} \implies P = 2500 \text{ kgf}$$

Como a região mais solicitada por esforços de compressão em um pilar é a sua base, tem-se que subtrair desta carga P o peso próprio do pilar, tendo como base o peso específico da alvenaria de tijolos maciços que é de 1.800 kgf/m³.

$$P_{FINAL} = 2500 - (0.2.0, 25.2).1800 \, \text{kgf} \, / \, \text{m}^3 = 2320 \, \text{kgf}$$

ESTUDO DAS TRELIÇAS ISOSTÁTICAS

1 - Introdução

Seja a estrutura da Fig. IV-1, submetida a carregamento apenas nos nós A, B, C. Como as barras 1, 2 e 3 que a constituem são barras retas e rígidas, portanto, pelas equações diferenciais (II.1) e (II.2) instituídas no capítulo anterior, levando-se em conta que q=0 e que suas extremidades são rotuladas, elas não terão momentos fletores nem esforços cortantes, existindo apenas os esforços normais.

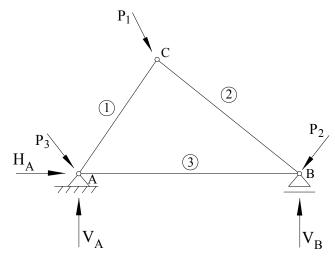


Figura IV-1

As grandezas a determinar para sua resolução são, então, as reações de apoio H_A , V_A , V_B e os esforços normais atuantes nas barras 1, 2, 3 que podem ser obtidos, no caso, pela análise sucessiva do equilíbrio dos nós C, B e A. O equilíbrio de cada um dos nós nos fornece duas equações, num total de seis, sendo o problema, então, isostático (igual número de equações e de incógnitas a determinar).

Por outro lado, desprezando-se as pequenas deformações elásticas que terão as barras 1, 2 e 3, podemos dizer que o sistema estrutural da Fig. IV-1 constitui uma cadeia rígida, pois, sendo o trecho AB indeformável (por se tratar, isoladamente, de uma viga biapoiada), se lhe acrescentamos as duas barras 1 e 2 concorrentes em C, este ponto fica também indeslocável, por estar preso a dois pontos indeslocáveis A e B.

Chamaremos treliça ideal ao sistema reticulado cujas barras têm todas as extremidades rotuladas e cujas cargas estão aplicadas apenas em seus nós.

Considerações

a) As treliças surgiram como um sistema estrutural mais econômico que as vigas para vencer vãos maiores ou suportar cargas mais pesadas. É claro que a palavra economia engloba comparação entre materiais, mão-de-obra, equipamentos de execução, etc., usados nos dois casos, podendo assumir, por esta razão, facetas diversas de região para região e de época para época.

- b) Devemos, desde já, fazer uma crítica, no sentido de alertar o leitor para o caráter aproximado (se bem que de aproximação excelente) da teoria que vamos desenvolver, a seguir, para as treliças.
- c) Conforme verificamos a partir do exemplo da Fig. IV-1, uma treliça biapoiada, constituída por três barras formando um triângulo, é isostática. Se, a partir desta configuração básica, formamos novas treliças, acrescentando à existente duas a duas novas barras, concorrentes cada duas delas num novo nó, a nova treliça será também isostática, pois a cada duas novas incógnitas (esforços normais nas duas novas barras) correspondem duas novas equações de equilíbrio (equilíbrio do novo nó). O exemplo da Fig. IV-7 ilustram esta lei de formação de treliças isostáticas.

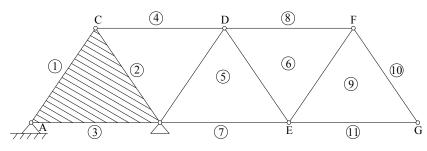


Figura IV-7

Nestes exemplos, partindo da treliça biapoiada ABC, chegamos ao nó D pelas barras 4 e 5, ao nó E pelas barras 6 e 7, ao nó F pelas barras 8 e 9 e, finalmente, ao nó G pelas barras 10 e 11.

Os apoios não precisam, é claro, estar no triângulo a partir do qual iniciamos a lei de formação, pois, onde quer que estejam, fornecem as mesmas três incógnitas. Falando sob o ponto de vista de cadeia rígida, uma treliça que tem esta lei de formação das barras é internamente rígida e, tendo apoios externos que impeçam todos os movimentos possíveis (para o caso de treliça plana, duas translações e uma rotação), será também externamente rígida, sendo, pois, rígida em conjunto.

Por esta razão são, também, isostáticas as treliças das Figs. IV-9 e IV-10.

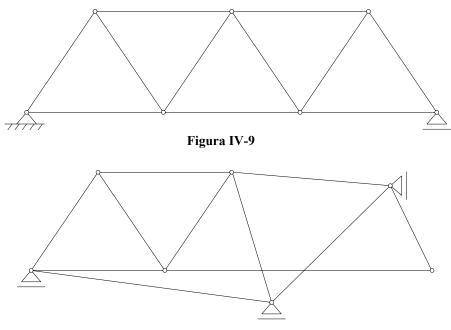


Figura IV-10

Outro tipo de treliça isostática é a treliça triarticulada da Fig. IV-11, para a qual temos seis incógnitas (quatro reações de apoio e esforços normais em duas barras) e seis equações de equilíbrio (equilíbrio dos nós A, B, C). Partindo desta nova configuração básica, podemos também formar treliças isostáticas, da mesma forma com que as formamos a partir da configuração da Fig. IV-1.

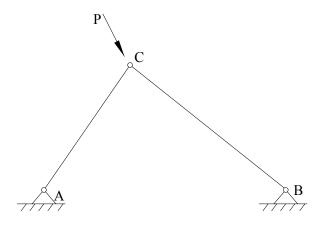


Figura IV-11

Chamamos treliças simples às treliças isostáticas, obtidas a partir das configurações fundamentais das Figs. IV-1 e IV-11, pela adição de duas a duas barras, partindo de nós já existentes para novos nós (um novo nó para cada duas novas barras). Seus métodos de resolução serão tratados nos itens 3 e 4 deste capítulo.

- d) As treliças, por terem esforços normais de tração e de compressão, são geralmente de madeira ou de aço, por serem materiais que suportam bem estes dois tipos de esforços. Ocorrem, também, embora com menos freqüência, treliças de concreto, porque, como sabemos, o concreto não trabalha bem à tração, além de sermos obrigados a executálas de uma só vez (ao passo que as demais podem ser montadas peça a peça).
- e) As treliças isostáticas possuem dois grandes métodos de resolução: um, analítico, que é o método de Ritter e, outro, gráfico, que é o método de Cremona. Existem ainda outros métodos de resolução, de menor importância, e que não serão, portanto, abordados neste Curso.
- f) As treliças comportam ainda um processo espontâneo de resolução, que consiste no estudo, um a um, do equilíbrio de seus nós, iniciado e prosseguido pelos nós que só possuam duas incógnitas a determinar, até termos abrangido todos os nós da treliça. No caso de treliças com geometria bem simples, este processo pode se tornar até aconselhável.
- g) Queremos chamar a atenção do leitor para o fato de que, ao contrário do caso dos quadros que ocorrem, em sua grande maioria, hiperestáticos, sendo o estudo dos quadros isostáticos base para o estudo daqueles, a grande maioria das treliças da prática é isostática.

2 - Classificação das treliças

2.1 - Quanto à estaticidade

Quanto à estaticidade, uma treliça pode ser hipostática, isostática ou hiperestática.

As incógnitas do problema são em número de (r + b), sendo r o número de reações de apoio a determinar e b o número de barras (e, portanto, o número de esforços normais a determinar) e as equações de equilíbrio em número igual a 2n, sendo n o número total de nós, incluindo os nós de apoio da estrutura (pois cada nó nos dá duas equações da estática, correspondentes ao equilíbrio de um ponto material).

Três casos podem ocorrer:

- $1.^{\circ}$) r + b < 2n, ou seja, o número de incógnitas é inferior ao de equações; poderemos afirmar, então, que a treliça é **hipostática**;
- $2.^{\circ}$) r + b = 2 n, o que sugere tratar-se de uma treliça isostática. Esta simples igualdade não nos permite, entretanto, afirmar que a treliça seja **isostática**, pois podemos ter a associação, internamente, de trechos hiperestáticos com trechos hipostáticos, conduzindo a uma isostaticidade interna aparente, bem como pode ocorrer a associação de hiperestaticidade interna com hipostaticidade externa (ou vice-versa), conduzindo também a uma isostaticidade aparente para o conjunto. O diagnóstico final só poderá ser dado após a análise dos apoios externos e da lei de formação interna da treliça em questão:
- $3.^{\circ}$) r + b > 2 n, o que sugere tratar-se de uma treliça hiperestática (maior número de incógnitas que de equações). Não podemos, entretanto, afirmar que a treliça seja hiperestática, pois a associação de um trecho hiperestático com outro hipostático (sendo o grau hiperestático de um trecho superior ao grau hipostático do outro) pode conduzir a uma **hiperestaticidade** aparente para o conjunto. Analogamente ao caso anterior, o diagnóstico final só poderá ser dado após a análise de cada caso. Se a treliça for, de fato, hiperestática, seu grau hiperestático será igual, evidentemente, a (r + b 2 n).

Em resumo, podemos afirmar que:

- a) r + b < 2n é condição necessária e suficiente para que uma treliça seja hipostática;
- b) r + b = 2n e r + b > 2n são condições apenas necessárias (mas não suficientes) para que uma treliça seja isostática ou hiperestática, respectivamente. A palavra final será dada após o exame específico de cada caso.

Os exemplos seguintes esclarecerão.

Exemplo 1 - Trata-se de uma treliça externamente isostática e, tendo a lei de formação de uma treliça simples (sendo, portanto, internamente isostática), é então isostática, o que é confirmado pela relação r + b = 3 + 15 = 18 = 2n.

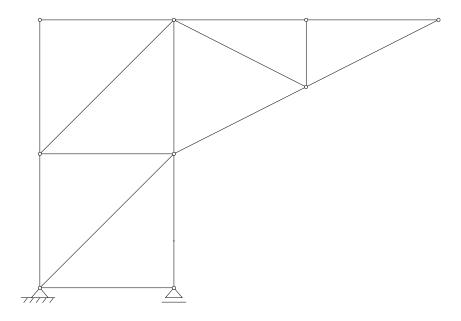


Figura IV-12

Exemplo 2 - A treliça tem a mesma quantidade de nós, barras e apoios que a da Fig. IV-12, sendo, portanto, satisfeita a relação r + b = 2n.

A treliça é também externamente isostática (biapoiada), mas, como seu trecho (CDEF é deformável (ver observação do tópico anterior), ela é hipostática internamente, sendo o conjunto, portanto, hipostático.

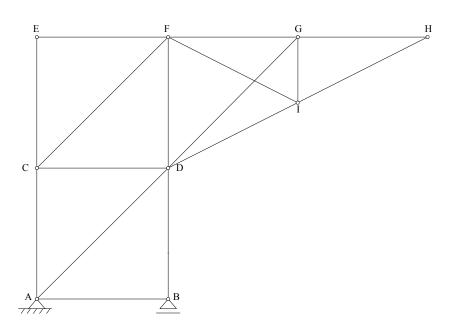


Figura IV-13

Exemplo 3 - A treliça tem r + b = 4 + 14 = 18 e tem 2n = 16, o que sugere que ela seja duas vezes hiperestáticas, o que de fato é, pois não há, no caso, hipostaticidade interna nem externa.

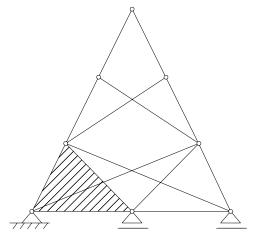


Figura IV-14

Poderíamos chegar, também, a esta conclusão da forma seguinte.

Externamente a treliça é uma vez hiperestática (quatro incógnitas, reação de apoio contra três equações universais da estática); internamente, partindo do triângulo hachurado, nós percorremos todos os nós da treliça e todas as suas barras, exceto uma, quando propagamos a lei de formação de treliça simples, o que indica existir uma incógnita (uma barra) além das que podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio de nós, caracterizando o grau hiperestático interno da treliça igual a um. Seu grau hiperestático total será, portanto, igual a dois (há um apoio a mais e uma barra a mais em relação à quantidade que tornaria isostática a treliça).

Observação: O conceito utilizado neste último exemplo, de igualar o grau hiperestático de uma treliça à soma de seus graus hiperestáticos externos e internos, é perfeitamente lícito, pois o grau hiperestático externo indica a quantidade de apoios superabundantes e o grau hiperestático interno a quantidade de barras superabundantes, cuja soma nos fornece o número de incógnitas (r + b - 2n) que não podemos determinar com o auxílio das equações de equilíbrio estático igual, por definição, ao grau hiperestático da treliça.

Exemplo 4 - A treliça tem r + b = 4 + 19 = 23 e 2n = 20, o que sugere que seja três vezes hiperestática. No entanto, uma análise sua nos mostra que se trata de uma treliça hipostática, pois, tanto externamente (todos os apoios do 10 gênero paralelos, com o que não está impedido o movimento na direção horizontal) como internamente (painel ABCD é deformável) a treliça é hipostática.

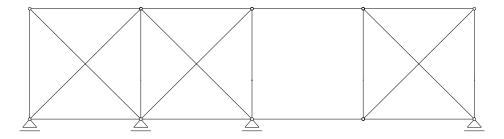


Figura IV-15

3 - Método de Ritter

3.1 - As bases do método

Seja a treliça isostática da Fig. IV-16, submetida ao carregamento indicado, para o qual as reações de apoio, calculadas com o emprego das equações universais da estática, são as indicadas na mesma.

Suponhamos querer determinar, por exemplo, os esforços normais atuantes nas barras 3, 13 e 7.

Rompendo a treliça nestas barras através da seção S-S indicada na Fig. IV-17, nada se alterará sob o ponto e vista estático se substituirmos as barras rompidas pelos esforços normais nelas atuantes. Estas barras serão determinadas como sendo as forças tais que promovam o equilíbrio do trecho assim seccionado da treliça, já que ele deve estar em equilíbrio, por pertencer a uma peça em equilíbrio.

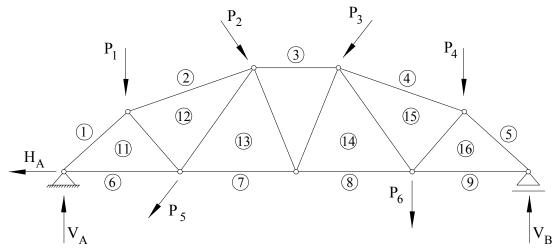
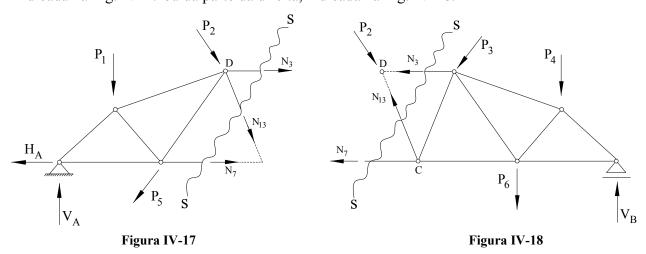


Figura IV-16

É evidentemente indiferente analisar-se o equilíbrio da parte da esquerda, indicada na Fig. IV-17 ou da parte da direita, indicada na Fig. IV-18.



Escolheremos, de preferência, aquela que acarretar menor trabalho numérico na obtenção dos esforços normais desejados. Como observação de caráter conceitual, queremos frisar que, na Fig. IV-17, as forças N_3 , N_{13} e N_7 representam as ações da parte da direita da treliça sobre a parte da esquerda; na Fig. IV-18 representam as ações da parte da esquerda sobre a parte da direita.

Podemos, então, passar à determinação de N₃, N₁₃ e N₇, que será feita a partir das equações universais da estática no plano, devendo ser escolhidas e usadas numa ordem tal que permita a determinação direta de cada uma das incógnitas, a fim de simplificar o trabalho algébrico do problema.

No caso (usando-se o esquema da Fig. IV-17 ou IV-18), a partir de $\sum M_C = 0$ obtemos N_3 ; por $\sum M_D = 0$, obtemos N_7 e, finalmente, por $\sum Y = 0$ obtemos N_{13} .

As forças obtidas com sinal positivo confirmarão os sentidos arbitrados nas Figs. IV-17 e IV-18 (e serão de tração, portanto, no caso), invertendo-os caso contrário (sendo, então, no caso, de compressão).

Este método, embora obedecendo apenas às idéias gerais da estática, levou o nome de Ritter por ter sido ele o seu lançador. As seções S-S usadas para a obtenção dos esforços normais desejados levam também o seu nome, sendo denominadas seções de Ritter.

Observações:

- a) Devemos escolher seções de Ritter que interceptem três barras não paralelas nem concorrentes no mesmo ponto, a fim de que possamos determinar seus esforços normais pelas equações universais da estática. Podem, entretanto, ocorrer seções de Ritter que interceptem mais de três barras e a partir das quais consigamos determinar os esforços normais em alguma(s) das barras.
- b) As seções de Ritter podem ter formas quaisquer (não precisando ser retas), desde que sejam contínuas, pois sua única obrigação é atravessar toda a treliça.
- c) Quando, após dada a seção de Ritter, formos arbitrar os sentidos dos esforços normais incógnitos, no caso de nossa sensibilidade estática não nos fazer antever seu sentido correto, aconselhamos sejam todos colocados no sentido de tração, pois, assim, os sinais obtidos já serão os sinais dos esforços atuantes. (O sinal positivo, confirmando o sentido arbitrado, indicará tração e o negativo, negando-o, indicará a compressão.)
- d) No caso de barras próximas às extremidades da treliça (por exemplo, as barras 1 e 5 no exemplo da Fig. IV-16), pode ocorrer que a seção de Ritter imaginada para atravessá-las só intercepte duas barras; isto quererá dizer, apenas, que seus esforços normais podem ser obtidos diretamente por análise do equilíbrio dos nós extremos (no caso, do nó A para a barra 1 e do nó B para a barra 5). Neste caso, o método de Ritter terá degenerado na análise do equilíbrio de um nó da treliça.
- e) O método de Ritter se presta admiravelmente ao cálculo das treliças de altura constante, fazendo-o recair até no cálculo de uma viga de substituição quando o carregamento é vertical. É também o método adotado quando só desejamos conhecer os esforços normais em algumas das barras da treliça.

Para treliças de geometria mais complicada, será preferível o método gráfico de Cremona, que estudaremos no item 4 deste capítulo.

Exemplos:

A) Obter, para as treliças isostáticas seguintes, os esforços normais nas barras indicadas.

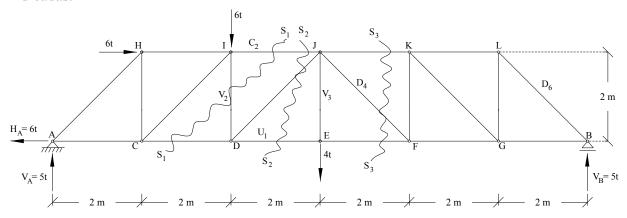


Figura IV-19

Sendo as reações de apoio as indicadas na Fig. IV-19, passemos à obtenção dos esforços normais pedidos.

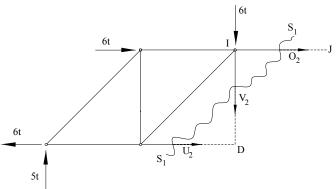


Figura IV-20

Pela seção S_1 - S_1 , podemos obter os esforços normais em O_2 , V_2 e na barra inferior CD (que não é pedido neste exemplo), a partir do esquema da Fig. IV-20, obtendo:

$$\sum M_D = 0 \implies 2O_2 + 6 \times 2 + 5 \cdot 4 = 0$$
 : $O_2 = -16 \text{ t (compressão)}$
 $\sum Y = 0 \implies V_2 + 6 - 5 = 0$: $V_2 = -1 \text{ t (compressão)}$

Caso desejássemos o valor de U_2 , poderíamos obtê-lo, ou a partir de $\sum M_I=0$ ou de $\sum X=0$, chegando ao valor $U_2=+$ 16 t.

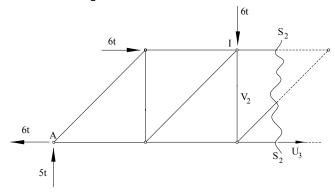


Figura IV-21

A partir da seção $S_2\text{-}S_2$, obteremos U_3 , que é dado, conforme o esquema da Fig. IV-21, por:

$$\sum M_J = 0 \implies 6 \cdot 2 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 2 - 2U_3 = 0 : U_3 = +15 t \text{ (tração)}$$

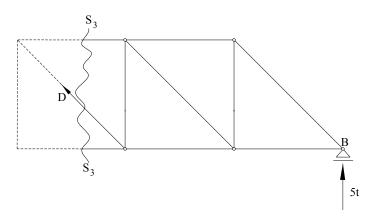


Figura IV-22

A partir da seção S₃-S₃, obtemos D₄, dado conforme o esquema da Fig. IV-22:

$$\sum Y = 0$$
 $D_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 = 0$ $D_4 = -5\sqrt{2}$ (compressão)

Para a obtenção do esforço normal na barra V_3 , não conseguimos nenhuma seção de Ritter que, juntamente com V_3 , atravesse três barras não concorrentes no mesmo ponto. É fácil ver, no caso, que a forma mais simples de obtenção de V_3 é a partir do equilíbrio do nó E da treliça, obtendo-se, conforme o esquema da Fig. IV-23, o valor $V_3 = +4$ t, por $\sum Y = 0$.

Analogamente, por consideração do equilíbrio do nó B, obtemos, por $\sum Y = 0$:

$$D_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 = 0$$
 $D_6 = -5\sqrt{2}$ (compressão)

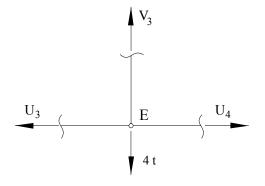


Figura IV-23

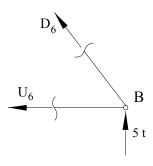
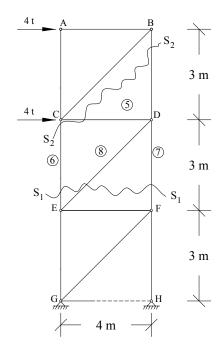


Figura IV-24

B) A partir da seção S₁-S₁ indicada na Fig. IV-26, temos:

$$\begin{split} \sum M_E = 0 &=> 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 4N_7 = 0 \ \therefore \ N_7 = -9 \ t \ (compress\~ao) \\ \sum M_D = 0 &=> 4 \cdot 3 - 4N_6 = 0 \ \therefore \ N_6 = + 3 \ t \ (tra\~a\~ao) \\ \sum X = 0 &=> N_8 \cdot \frac{4}{5} - 8 = 0 \ \therefore \ N_8 = + 10 \ t \ (tra\~a\~ao) \end{split}$$



 $\begin{array}{c|c}
4t & A & B \\
\hline
4t & C & D \\
\hline
S_1 & N_8 & N_7 & S_1 \\
\hline
E_{\theta} & & & & \\
\end{array}$

Figura IV-25

Figura IV-26

A partir da seção S_2 - S_2 indicada na Fig. IV-17, obtemos, por $\sum X = 0$:

$$N_5 = -8 t \text{ (compressão)}$$

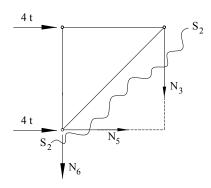
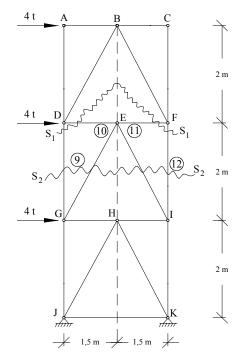


Figura IV-27

Observação:

No caso deste exemplo, não foi necessário calcular as reações de apoio, pois ficaram no lado da treliça não utilizado para os cálculos.

C) c.1) A partir da seção S_1 - S_1 , temos, conforme o esquema da Fig. IV-29:



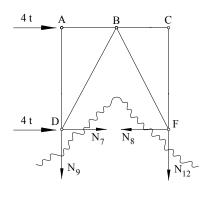


Figura IV-28

Figura IV-29

$$\sum MF = 0 \implies 4 \cdot 2 - 3N_9 = 0 \therefore N_9 = +2,67 \text{ t (tração)}$$

 $\sum Y = 0 \implies N_{12} = -2,67 \text{ t (compressão)}$

Por esta seção S_1 - S_1 , não podemos obter os esforços normais N7 e N8; eles só serão obtidos a partir de outras seções adequadas.

c.2) A partir da seção S_2 - S_2 , temos, conforme o esquema da Fig. IV-30, levando-se em conta que as barras 10 e 11 têm esforços normais de mesmo módulo e de naturezas opostas (por força da condição $\sum Y = 0$):

$$\sum X = 0 \implies 2N_{10} \cdot \frac{3}{5} - 8 = 0 : N_{10} = N_{11} = 6,67 t,$$

o que quer dizer, conforme a Fig. IV-30, que a barra 10 possui uma tração de 6,67 t e a barra 11 uma compressão de mesmo valor.

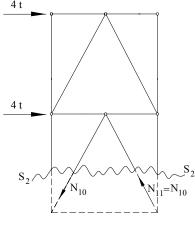
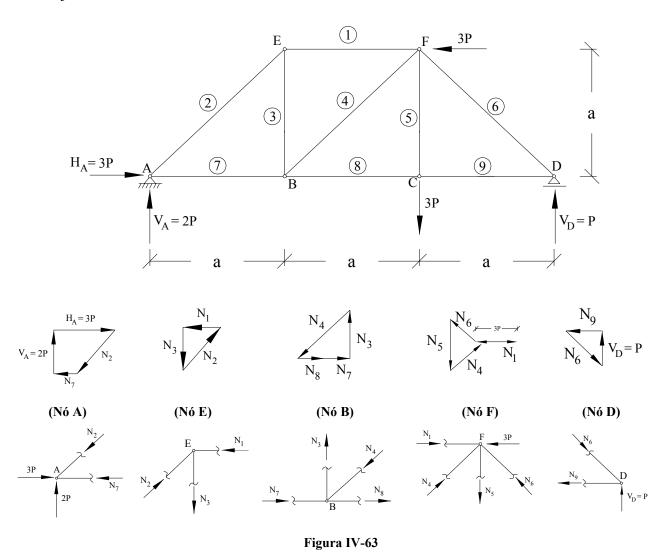


Figura IV-30

4 - Método de cremona

4.1. - Introdução

Seja a treliça simples, isostática, da Fig. IV-63, cujos esforços normais desejamos determinar.



Tratando-se de uma treliça em equilíbrio, todos os seus nós também o estão, o que sugere, para a determinação dos esforços normais atuantes em suas barras, seja feita sucessivamente a análise do equilíbrio de cada um de seus nós que, conforme sabemos, constitui a análise de um sistema de forças aplicadas num ponto material (sendo estas forças as cargas externas e os esforços normais nas barras concorrentes no nó em questão). Fazendo-se esta análise por via gráfica, sabemos que as forças e esforços normais atuantes sobre o nó devem formar um polígono fechado (condição de resultante nula), com o que obtemos os esquemas de equilíbrio dos diversos nós.

Observações:

- a) No caso, poderíamos começar a análise de equilíbrio pelo nó A ou pelo nó D; preferimos o nó A, cujo equilíbrio, conforme o esquema da Fig. IV-64, nos forneceu os valores dos esforços normais atuantes nas barras 2 e 7, de compressão, no caso.
- b) Para o traçado do polígono fechado de equilíbrio, marcamos inicialmente, as forças e (ou) esforços normais já conhecidos e, a seguir, pelas extremidades do polígono aberto assim definido, tiramos paralelas às direções dos esforços normais incógnitos, cuja intercessão determinará o polígono fechado de equilíbrio, a partir do qual obtemos os módulos e sinais dos esforços normais desejados. Os sinais dos esforços normais desejados podem ser obtidos (sem que seja necessário fazer o croqui do nó), verificando-se simplesmente se o esforço normal aponta para o nó analisado (indicando compressão) ou foge dele (indicando tração). Isto pode ser facilmente verificado para todos os casos da Fig. IV-64.
- c) No traçado do polígono de equilíbrio, dependendo do sentido em que percorremos o nó, ele pode assumir duas configurações diferentes (conduzindo, é claro, ao mesmo resultado). Por exemplo, para o nó A, se ele for percorrido no sentido horário, o polígono de equilíbrio será o da Fig. IV-64, e, se o sentido for o anti-horário, ele será o da Fig. IV-65 seguinte, sendo idênticos, evidentemente, os resultados obtidos por um ou por outro.

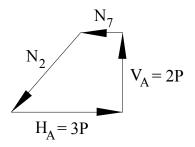


Figura IV-64

Apenas para evitar este grau de liberdade no traçado dos poligonos de equilíbrio, adotaremos sempre o percurso do nó no sentido horário. Isto será particularmente importante para o método de Cremona, que exporemos no tópico seguinte deste item.

- d) No exemplo dado, obtivemos duas a duas incógnitas na análise do equilíbrio dos nós A, E, B, F; quando analisamos o equilíbrio do nó D, apenas o esforço normal na barra 9 era incógnito (temos nele, portanto, duas equações e uma só incógnita) e, com isto, ficaram determinados os esforços normais em todas as barras, não tendo sido necessário analisar o equilíbrio do nó C (para o qual temos, então, 2 equações e nenhuma incógnita). Sobraram, então, três equações de equilíbrio, o que já era de se esperar, pois elas foram empregadas no cálculo das reações de apoio. Com isto, a análise do equilíbrio dos nós C e D nos permite verificar a precisão do traçado gráfico, bem como a correção das reações de apoio calculadas, constituindo-se então num excelente teste dos resultados obtidos.
- e) Analisando-se os polígonos de equilíbrio da Fig. IV-64, vemos que cada esforço normal aparece duas vezes, pois seu valor é calculado num polígono, sendo, depois, na qualidade de valor já conhecido, usado na construção do polígono de equilíbrio de outro nó. Cada esforço normal é, portanto, traçado duas vezes. A partir desse fato, surgiu a idéia de se desenharem todos os polígonos de equilíbrio numa mesma figura, evitando-se a necessidade de transpor esforços normais de um polígono para outro. Esta idéia é a essência do método de Cremona, que exporemos a seguir.

4.2 - Apresentação do método

4.2.1 - Notação das cargas e dos esforços normais

Adotaremos, para designar as forças externas (cargas aplicadas e reações de apoio) e as forças internas (esforços normais), a notação de Bow.

Marcamos com letras minúsculas, conforme indica a Fig. IV-66, todos os espaços compreendidos entre as forças (quer exteriores, quer interiores), que serão designadas pelas duas letras a elas adjacentes.

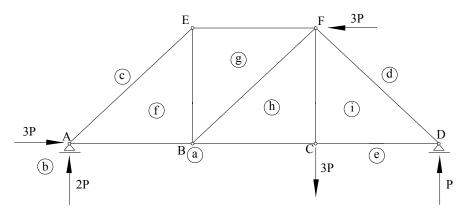


Figura IV-66

Assim, a reação vertical em A será denominada ab, a carga horizontal em F será cd, o esforço normal na barra BC será ha (ou ah), o da barra BF será gh (ou hg), e assim sucessivamente.

4.2.2 - Roteiro do método

A partir da introdução feita em 4.1, onde expusemos os fundamentos do método, que consistirá no traçado de uma figura única englobando todos os polígonos de equilíbrio de forças e à qual chamaremos cremona, temos o seguinte roteiro para seu emprego:

- a) iniciamos o traçado do cremona analisando o equilíbrio de um nó que contenha apenas duas barras com esforços normais conhecidos;
- b) no traçado do cremona, começaremos pelas forças e (ou) esforços normais já conhecidos, deixando as duas incógnitas como duas forças finais;
- c) todos os nós serão percorridos no mesmo sentido, quando da análise do seu equilíbrio. Adotaremos este sentido, sempre, como o sentido horário (isto para não deixar em aberto um grau de liberdade a ter que ser discutido em cada problema, com a adoção deste sentido de percurso ou de seu inverso);
- d) prosseguiremos o traçado do cremona, sempre, por nós onde só haja duas incógnitas a determinar, até esgotá-los, encerrando-se então a resolução da treliça.

Como primeira aplicação do método de Cremona, refaremos o cálculo da treliça da Fig. IV-63, cujo cremona traçado na Fig. IV-67.2 vem detalhadamente comentado a seguir.

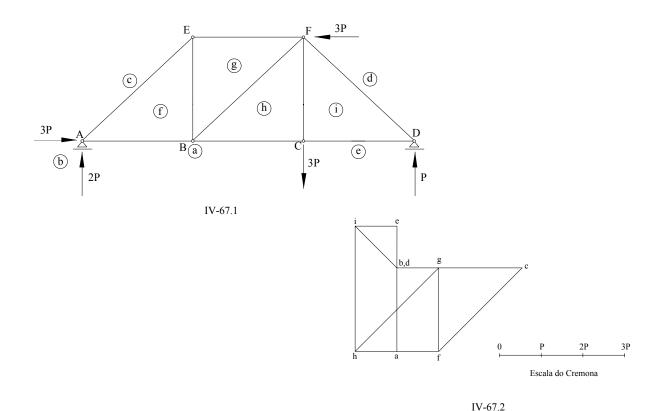


Figura IV-67

- a) Inciando pelo nó A, marcamos, no cremona ab = 2P e, a seguir, bc = 3P; por c tiramos uma paralela à barra AE e por a, definindo f. O polígono fechado abefa representa o equilíbrio do nó A; os módulos dos esforços normais nas barras AE e AB são lidos no cremona e iguais a cf e fa, sendo ambos de compressão (os vetores cf e fa convergem para o nó A).
- b) A seguir, passamos à análise do nó E, para o qual já conhecemos o esforço normal na barra AE. Percorrendo o nó no sentido horário (o que faremos sempre), temos já desenhado no cremona o vetor fc; por c tiramos uma paralela a EF e por f uma paralela a EB, cuja intercessão define g. Os esforços normais nas barras EF e EB são, então, dados por cg (compressão) e gf (tração), respectivamente.
- c) Na análise do nó B, os esforços normais em AB e BE já são conhecidos e são representados no cremona por af e fg. Tirando-se, respectivamente, por g e por a paralelas a BF e BC, determinamos h; os esforços normais nestas duas barras são, então, dados por gh (compressão) e ha (tração).
- d) Na análise do nó F, os esforços normais em BF, EF e a carga horizontal 3P atuante em F estão representados por hgcd no cremona (no caso, os pontos b e d do cremona foram coincidentes). Tirando-se, respectivamente por d e por h, paralelas a FD e FC, determinamos i, os esforços normais nestas 2 barras são, então, dados por di (compressão) e ih (tração).
- e) Analisando o nó D, observamos que temos neste nó elementos de verificação, pois a única incógnita é o esforço normal na barra DC. Seu polígono de equilíbrio, de imediata obtenção, é idei, sendo o esforço normal na barra DC dado por ei (tração). A horizontalidade do segmento ei no cremona é a verificação a que nos referimos.
- f) O equilíbrio do nó C (cujas forças internas e externas já são todas conhecidas) pode ser verificado no cremona, onde está indicado pelo polígono fechado ahiea.

Observações:

a) Durante o traçado do cremona, não precisamos nos preocupar se o esforço normal obtido é de tração ou de compressão. Faremos esta análise quando o cremona já estiver pronto, análise imediata, conforme esclarece o exemplo seguinte.

Seja obter a natureza do esforço normal atuante na barra BF.

Analisando o equilíbrio do nó F, por exemplo, o esforço na barra será dado por hg (nó sempre percorrido no sentido horário), que converge para o nó, sendo, portanto, de compressão.

O mesmo esforço poderá ser obtido pela análise do nó B, sendo dado por gh, que converge para o nó, sendo, evidentemente, de compressão.

b) O método de Cremona, devido à sua enorme simplicidade, é o universalmente adotado na resolução das treliças. É superado pelo de Ritter apenas para treliças de altura constante, para as quais este método permite uma solução muito rápida e elegante.

4.3. Exemplos

Exemplo 1) Resolver a treliça da Fig. IV-68.

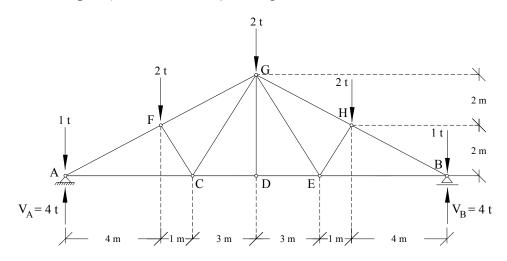


Figura IV-68

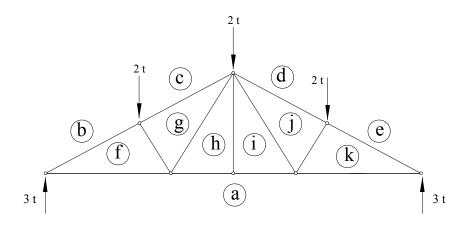


Figura IV-69

Adotando-se a notação indicada na Fig. IV-69, teremos o cremona da Fig. IV-70, iniciado pelo nó A, que fornece, em toneladas, os esforços normais assinalados na Fig. IV-71.

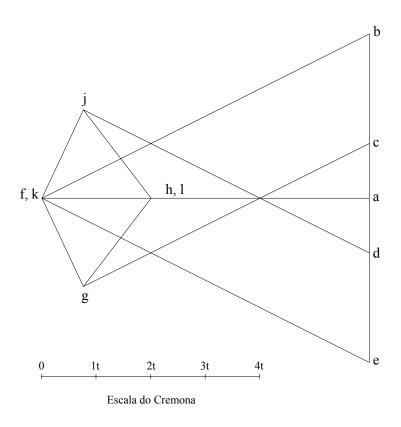
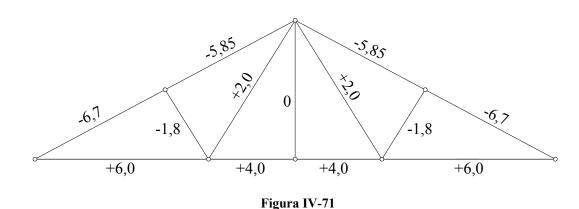


Figura IV-70



Observações:

- a) Poderíamos ter traçado o cremona para meia treliça apenas, por sabermos que os esforços normais serão simétricos. Preferimos, entretanto, traçá-lo completo, a fim de melhor exercitar o leitor.
- b) O esforço normal nulo na barra GD poderia ser obtido a priori por simples análise da condição $\sum Y=0$ de equilíbrio do nó D.

Exemplo 2) Resolver a treliça da Fig. IV-72.

Sendo as reações de apoio as indicadas na Fig. IV-72 e a notação adotada a da Fig. IV-73, teremos o cremona da Fig. IV-74, cujo traçado é iniciado pelo nó G.

Os esforços obtidos encontram-se indicados, em toneladas, na Fig. IV-75.

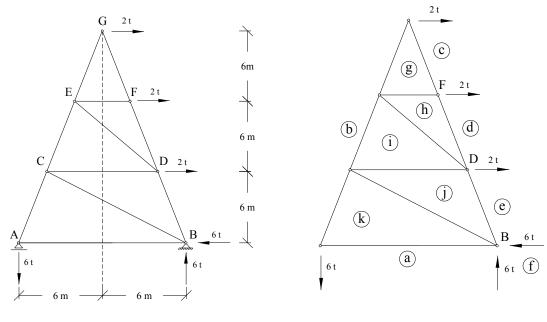


Figura IV-72

Figura IV-73

Observação:

Na treliça deste exemplo, poderíamos ter obtido as reações de apoio pelo cremona; preferimos, no entanto, calculá-las previamente, a fim de ficarmos em condições de fazer as verificações de equilíbrio no cremona traçado.

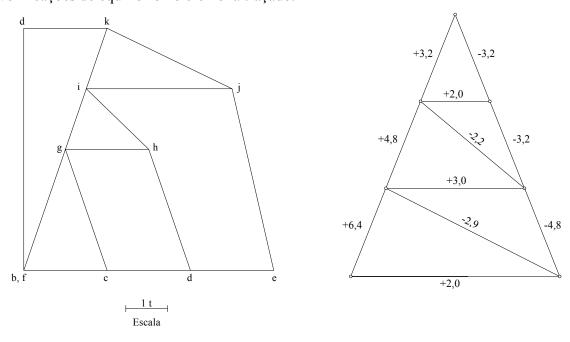


Figura IV-74

Figura IV-75

HIPERESTÁTICA - PROCESSO DE CROSS

1 - Introdução

Seja o nó A da estrutura representada na Fig. III-1.1, submetido à ação de uma carga momento M. Devido à atuação deste momento M, o nó irá girar de um ângulo ϕ , aparecendo então, na extremidade das barras 1, 2, 3 e 4, os momentos indicados na Fig. II-1.2, de módulos iguais a:

$$M_1 = K_1^{A} \phi$$
, $M_2 = K_2^{A} \phi$, $M_3 = K_3^{A} \phi$ e $M_4 = K_4^{A} \phi$ II.1

Onde, conforme a definição de rigidez de uma barra em um nó, tem-se:

- rigidez absoluta de uma barra duplamente engastada igual a:

$$K = \frac{4EJ}{\ell}$$

- rigidez absoluta de uma barra com um extremo engastado e outro articulado igual a:

$$K' = \frac{3EJ}{\ell}$$

- rigidez relativa igual a:

$$k = \frac{K}{4E}$$

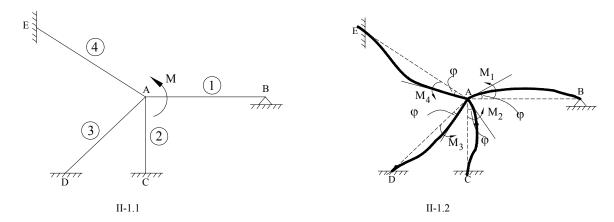


Figura II-1

Evidentemente, devemos ter, por compatibilidade estática do esquema da Fig. II-1.1 com o da Fig. II-1.2,

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = M$$
, e daí obtemos:

$$\varphi(K_1^A + K_2^A + K_3^A + K_4^A)$$

Identificando o termo entre parênteses como a soma dos valores da rigidez em A de todas as barras concorrentes neste nó, e à qual chamaremos simplificadamente, $\sum K_i$, podemos escrever:

$$\varphi = \frac{M}{\sum k_i}$$
 II.2

Levando em conta as expressões (II.1) e (II.2), podemos determinar, então, em que parcelas o momento M irá se subdividir entre as diversas barras concorrentes no nó A, obtendo-se:

$$M_1 = \frac{K_1}{\sum K_i} M$$
, $M_2 = \frac{K_2}{\sum K_i} M$, $M_3 = \frac{K_3}{\sum K_i} M$, $M_4 = \frac{K_4}{\sum K_i} M$

De uma maneira geral, podemos dizer que uma barra genérica i irá receber uma fração $\frac{K_i}{\sum K_i}$ do momento M aplicado no nó, ou seja:

$$M_{i} = \frac{K_{i}}{\sum K_{i}} M$$
 II.3

Da expressão (II.3), podemos tirar as seguintes conclusões:

- a) Uma carga-momento aplicada num nó de uma estrutura totalmente indeslocável irá se distribuir, entre as diversas barras concorrentes neste nó, segundo parcelas proporcionais à rigidez, neste nó, de cada uma destas barras.
- b) A relação $\frac{K_i}{\sum K_i}$ (simbolizando a fração do momento atuante no nó que irá para a barra i), denominaremos coeficiente de distribuição de momentos di para a barra i, escrevendo-se então:

$$d_{i} = \frac{K_{i}}{\sum K_{i}}$$
 II.4

o que nos permite reescrever a expressão (I.3) na forma:

$$M_i = d_i M$$
 II.5

Observações:

- a) Evidentemente, a soma dos coeficientes de distribuição de momentos di em torno de um nó é igual a 1.
- b) Analisando o segundo membro da expressão (II.4), é fácil se concluir que ela não se alterará se dividirmos numerador e denominador por (AE), isto é, se trabalharmos com a rigidez relativa k de cada barra ao invés de sua rigidez absoluta K. É lícito, então, escrever:

$$d_{i} = \frac{K_{i}}{\sum K_{i}} = \frac{k_{i}}{\sum k_{i}}$$
II.6

c) Precisamos, agora, fixar uma convenção de sinais de momentos que será fundamental para o processo de Cross e que é, em tudo, coerente com a convenção apresentada na tabela I.

Para tal, procederemos, inicialmente, a uma análise da atuação de momentos em torno do nó A da estrutura da Fig. II-1, o que está feito na Fig. II-2 onde interceptamos as barras 1, 2, 3 e 4 em seções infinitamente próximas ao nó A, no qual está aplicada a cargamomento M. Na figura, mostramos o equilíbrio do nó A, que se obtém, através dos momentos M₁, M₂, M₃ e M₄, no sentido horário, exercidos pelas barras 1, 2, 3 e 4 sobre o nó A. (A cargamomento aplicada foi, no caso, no sentido anti-horário).

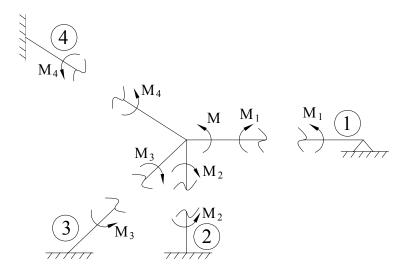


Figura II-2

TABELA I

Momentos de engastamento perfeito

(Vigas com inércia constante. Sinal positivo quando a barra sobre o nó exerce momento no sentido horário)

Condições de bordo P	A N	K.	A B B	В
Casos de carregamento	A	В		A
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$M_A = +\frac{q\ell^2}{12}$	$M_{\rm B} = -\frac{q\ell^2}{12}$	$M_A = +\frac{q\ell^2}{8}$	$M_{B} = -\frac{q\ell^{2}}{8}$
$\begin{array}{c c} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & $	$M_{A} = +\frac{qc}{12\ell^{2}} \left[12a$ $M_{B} = -\frac{qc}{12\ell^{2}} \left[12a$		$M_{A} = +\frac{qbc}{8\ell^{2}} \left[4a(b+\ell) - c^{2} \right]$	$M_{B} = -\frac{qac}{8\ell^{2}} \left[4b(a+\ell) - c^{2} \right]$
P B B	$M_A = +\frac{p\ell^2}{20}$	$M_{\rm B} = -\frac{p\ell^2}{30}$	$M_{A} = +\frac{p\ell^{2}}{15}p\ell$	$M_{B} = -\frac{7pl^{2}}{\ell 20}$
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$M_A = +\frac{p\ell}{8}$	$M_B = -\frac{p\ell}{8}$	$M_{A} = +\frac{3}{16}p\ell$	$M_{\rm B} = -\frac{3}{16} p\ell$
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$M_A = +\frac{pab^2}{\ell^2}$	$M_{B} = -\frac{pa^{2}b}{\ell^{2}}$	$M_{A} = +\frac{pab}{2\ell^{2}} (\ell + b)$	$M_{B} = -\frac{pab}{2\ell^{2}} (\ell + a)$
$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$M_{A} = -M \frac{b}{\ell} \left(2 - \frac{3b}{\ell} \right)$	$M_{B} = -M \frac{a}{\ell} \left(2 - \frac{3a}{\ell} \right)$	$M_{A} = +\frac{M}{2} \left(\frac{3b^{2}}{\ell^{2}} - \ell \right)$	$M_{B} = +\frac{M}{2} \left(\frac{3a^2}{\ell^2} - \ell \right)$

TABELA II Grandezas auxiliares para barras com inércia constante J

Barra biengastada	Barra biengastada
$ \begin{array}{cccc} A & B \\ & & \\ & \\ $	A B ×— ℓ —×
A B	φ = + ℓ A B
$K_{A} = \frac{4EJ}{\ell}$ $t_{A-B} = +\frac{\ell}{2}$	$K'_A = \frac{3EJ}{\ell}$
$t_{A-B} = +\frac{\ell}{2}$ $k_A = \frac{J}{\ell}$	$k'_{A} = \frac{3}{4} \cdot \frac{J}{\ell}$
A B P	A B
$M_A = M_B = +\frac{6EJ\rho}{\ell^2}$	$M_A = \frac{3EJ\rho}{\ell^2}$
A B	
$K_S = \frac{2EJ}{\ell}$	-
$k_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{\ell}$	
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	
$K_a = \frac{6EJ}{\ell}$	-
$k_a = \frac{3}{2} \cdot \frac{J}{\ell}$	

Para o processo de Cross, conforme se verá no tópico seguinte deste capítulo, trabalharemos com os momentos exercidos pelas barras sobre os nós, de modo que, consideraremos positivos os momentos exercidos pelas barras sobre os nós se forem no sentido horário.



Figura II-3 - Convenção de sinais para momentos exercidos pelas barras sobre os nós.

Desta forma, poderemos usar, em módulo e sinal, todas as tabelas I e II apresentadas.

d) Tendo em vista a convenção de sinais apresentada na observação anterior, podemos dizer que o nó A da estrutura da Fig. II-1.1 está submetido à atuação de uma cargamomento (-M), equilibrada por momentos (+M₁), (+M₂), (+M₃) e (+M₄) exercidos, respectivamente, pelas barras 1, 2, 3 e 4 sobre o nó A. Assim, os momentos equilibrantes em torno do nó A, têm sinais (dados pela convenção da Fig. II-3) opostos ao do momento atuante no nó, sendo seus módulos dados pela expressão (II.5).

2 - A idéia do processo

Seja resolver o quadro de inércia constante da Fig. II-4.1, que possui uma deslocabilidade interna (rotação do nó A) e para o qual os momentos de engastamento perfeito no sistema principal são os indicados na Fig. II-4.2.

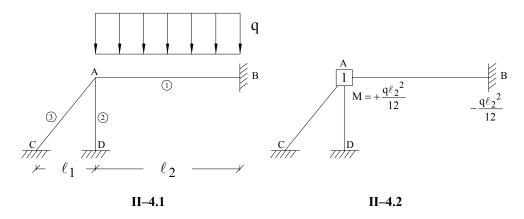


Figura II-4

Digamos que, no sistema principal da Fig. II-4.2, nós liberemos a rotação da chapa 1: o nó A funcionará, então, como que tendo uma carga-momento aplicada de $M = + ql^2 / 12$ (ação da barra 1 sobre o nó A) que será equilibrada, conforme vimos no item 1 deste capítulo, por momentos proporcionais à rigidez em A, das barras 1, 2 e 3, o que está indicado na Fig. II-5. Assim, o funcionamento dos nós do quadro, a partir do instante em que liberamos a rotação da chapa 1, será o indicado na Fig. II-6, que mostra os momentos que surgem nos nós em cada uma das fases de funcionamento da estrutura quais sejam:

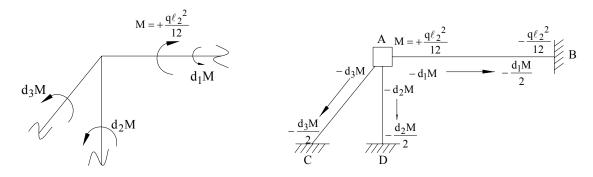


Figura II-5

Figura II-6

1.ª fase: Rotação do nó A impedida, isto é, nós A e B da barra 1 submetidos aos momentos de engastamento perfeito $+\frac{q\ell_2^2}{12}$ e $-\frac{q\ell_2^2}{12}$, respectivamente (isto é, ações da barra AB sobre os nós A e B, no sistema principal, iguais a $+\frac{q\ell_2^2}{12}$ e $-\frac{q\ell_2^2}{12}$, respectivamente).

2.ª fase: Liberamos a rotação do nó A. Com isto, o momento nele atuante na fase anterior, igual a $M=+\frac{q\ell\,2^{-2}}{12}$ (trazido pela barra 1) passa a atuar como carga-momento, sendo equilibrado pelos momentos (-d₁M), (-d₂M) e (-d₃M) atuantes em 1, 2 e 3, respectivamente.

Devido ao aparecimento destes momentos equilibrantes, serão transmitidos, para os engastes B, D e C, respectivamente, momentos iguais ao produto de seus valores pelos respectivos coeficientes de transmissão (todos eles iguais, no caso, a +0,5, pois tratam-se de barras biengastadas com inércia constante).

A estrutura está, então, resolvida, sendo os momentos finais atuantes em torno de cada nó os indicados na Fig. II-7 (obtidos pela soma dos momentos que atuam na primeira e segunda fase). Levando em conta a convenção de sinais da Fig. II-3, os momentos atuantes em torno de cada nó têm os sentidos indicados na Fig. II-8, que nos conduzem imediatamente ao diagrama final de momentos fletores da Fig. II-9.

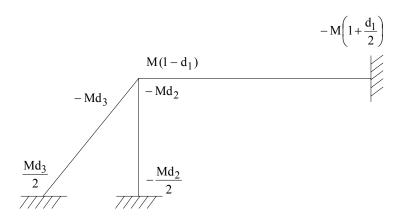


Figura II-7

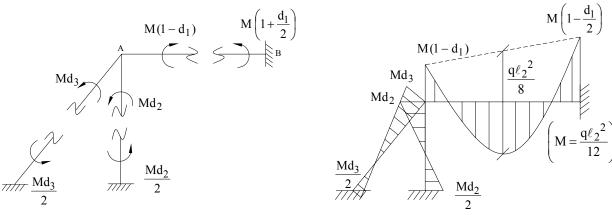


Figura II-8

Figura II-9

Observação: conforme é fácil verificar, a estrutura indeslocável da Fig. II-4 foi resolvida sem ter sido necessário escrever nem resolver qualquer equação de compatibilidade estática. Este já é o objetivo e a grande vantagem do processo de Cross que, conforme veremos mais adiante, resolve estruturas indeslocáveis (externamente) sem ser necessário escrever qualquer equação, pois sua essência é o equilíbrio, um a um, dos momentos atuantes em torno de cada nó, nos moldes do que se fez para o caso da Fig. II-4.1.

Com o objetivo de fixar e mecanizar a idéia usada na resolução do caso da Fig. II-4.1, refaremos o exemplo colocando, agora, dados numéricos. Seja, então, resolver o quadro de inércia constante da Fig. II-10 cuja única deslocabilidade (interna) é a rotação do nó A.

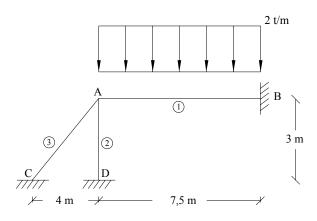


Figura II-10

Temos, em torno deste nó, os seguintes coeficientes de distribuição de momentos, obtidos a partir dos valores de rigidez relativa K para as barras 1, 2 e 3 indicados na Fig. II-10 (e que foram determinados arbitrando-se J = 30).

$$d_{1} = \frac{k_{1}}{\sum k} = \frac{4}{4 + 10 + 6} = 0,20$$

$$d_{2} = \frac{k_{2}}{\sum k} = \frac{10}{4 + 10 + 6} = 0,50$$

$$k_{3} = \frac{30}{5} = 6$$

$$k_{2} = \frac{30}{3} = 10$$

$$d_{3} = \frac{k_{3}}{\sum k} = \frac{6}{4 + 10 + 6} = 0,30$$
Figure II. 11

Figura II-11

A partir desses valores, temos a seguinte seqüência de operações, que reproduzem os passos da análise feita para o quadro da Fig. II-4.

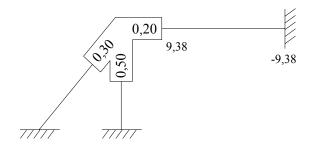


Figura II-12

1.º) Marcamos, no sistema principal da Fig. II-12, os valores dos coeficientes de distribuição em torno do nó interno A e os momentos de engastamento perfeito para a barra carregada, que valem:

$$M_A = M_B = \frac{2 \cdot 7.5^2}{12} = 9.38 \text{ mt (obtidos da Tabela I)}$$

2.º) Liberamos, no sistema principal, a rotação do nó A que terá então, uma cargamomento aplicada de (+9,38). Esta carga-momento será equilibrada por momentos de sinais contrários, em cada uma das barras concorrentes em A e de módulos iguais ao produto de seu valor pelos coeficientes de distribuição de momentos para cada barra.

Devido a estes momentos equilibrantes, indicados na Fig. II-13, serão transmitidos para os engastes B, C e D momentos iguais ao produto de seus valores pelos coeficientes de transmissão.

O esquema de momentos da Fig. II-13 mostra, então, todos os nós da estrutura em equilíbrio e, assim, os momentos finais atuantes em todos os nós do quadro são os indicados na Fig. II-14, da qual obtemos, pela convenção de sinais adotada (Fig. II-3) os sentidos corretos dos momentos atuantes nos nós representados na Fig. II-15, que nos conduzem ao diagrama de momentos fletores da Fig. II-16.

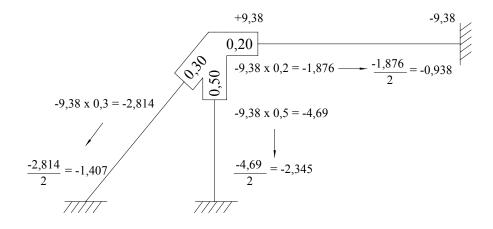


Figura II-13

Discutiremos, agora, um último caso, após o qual nos será imediato enunciar um roteiro para resolução de qualquer estrutura externamente indeslocável pelo processo de Cross.

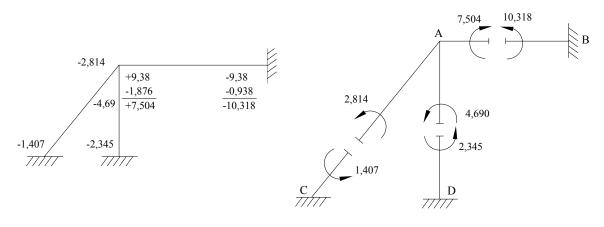


Figura II-14

Figura II-15

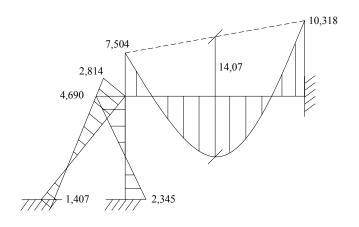


Figura II - 16 - DMF (em mt)

Seja resolver a viga de inércia constante da Fig. II-17, devido ao carregamento indicado.

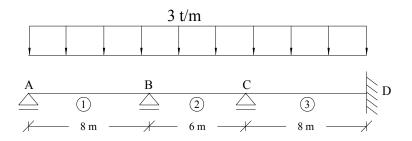


Figura II - 17

Tratanto-se de uma estrutura com duas deslocabilidades internas, a rotação dos nós B e C, o sistema principal é o da Fig. II-18, no qual bloqueamos as rotações existentes nestes nós com as chapas 1 e 2 surgindo nele, então, os momentos de engastamento perfeito indicados na Fig. II-18, iguais a:

Para a barra 1:

$$M_{B} = -\frac{q\overline{AB}^{2}}{8} = -\frac{3 \cdot 8^{2}}{8} = -24 \,\text{mt}$$

Para a barra 2:

$$M_B = -M_C = -\frac{q\overline{BC}^2}{12} = -\frac{3 \cdot 6^2}{12} = +9 \text{ mt}$$

Para a barra 3:

$$M_C = -M_D = -\frac{q\overline{CD}^2}{12} = -\frac{3 \cdot 8^2}{12} = +16 \,\text{mt}$$

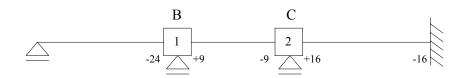


Figura II - 18

Pensando agora, em se adotar um procedimento análogo ao do exemplo estudado anteriormente, calculemos os coeficientes de distribuição de momentos em torno dos nós B e C.

Temos, trabalhando com rigidez relativa e arbitrando-se J=48, os valores de rigidez indicados na Fig. II-19, a partir dos quais determinados os coeficientes de distribuição de momentos em torno dos nós B e C, dados por:

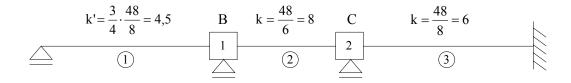


Figura II - 19

Em torno do nó B:

$$d_1 = \frac{4,5}{4,5+8} = 0,36$$
 $d_2 = \frac{8}{4,5+8} = 0,64$

Em torno do nó C:

$$d_2 = \frac{8}{8+6} = 0.57$$
 $d_3 = \frac{6}{8+6} = 0.43$

Na Fig. II-20, representamos os momentos de engastamento perfeito no sistema principal e os coeficientes de distribuição de momentos em torno de cada nó interno da estrutura. Sempre raciocinando, agora, com a figura II-20, temos:

 $1.^{\circ}$) Liberando a rotação do nó B, o mesmo ficará submetido a uma cargamomento de (-24) + 9 = -15 mt, equilibrada por momentos iguais a:

$$+ 15 \cdot 0.36 = + 5.4$$
 mt. no nó B da barra AB

 $+ 15 \cdot 0.64 = + 9.6 \text{ mt}$, no nó B da barra BC

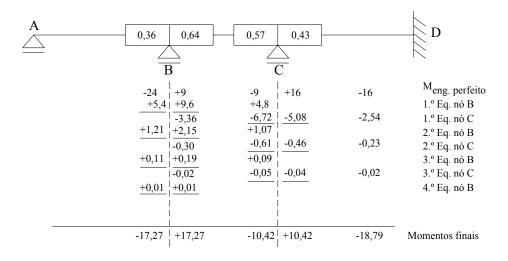


Figura II - 20

Devido ao aparecimento destes momentos equilibrantes, será transmitido ao nó C (que está engastado, pois não liberamos a rotação da chapa 2) um momento igual a t_{BC} (+9,6) = 0,5 . 9,6 = 4,8 mt. (Para o nó A, não é transmitido qualquer momento, por se tratar de um nó rotulado.)

O nó B, com os momentos de 5,4 mt e 9,6 mt está equilibrado e colocaremos então, em traço abaixo dos mesmos para caracterizar o equilíbrio. O esquema atual será, então, o da Fig. II-21, que transcrevemos para a Fig. II-20.

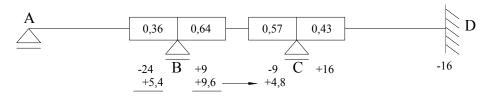


Figura II - 21

2.°) Estando equilibrado o nó B, (Fig. II-21), voltamos a colocar a chapa 1 impedindo novas rotações do mesmo; a estrutura do sistema principal não está ainda, entretanto, equilibrada, pois o nó C não está em equilíbrio.

Para conseguirmos, agora, o equilíbrio do nó C, liberamos a rotação da chapa 2, ficando o mesmo submetido a uma carga-momento de (16+4,8-9) = + 11,8 mt. Está será equilibrada por momentos iguais a:

- $-11.8 \cdot 0.57 = -6.72$, no nó C da barra BC
- 11,8 . 0,43 = -5,08, no nó C da barra CD

Como nas extremidades B e D estão impedidas as rotações (pois, nesta fase, estamos liberando, apenas, a rotação da chapa 2), nelas aparecerão momentos iguais ao produto dos momentos equilibrantes pelos coeficientes de transmissão (iguais no caso, a +0,5, por terem as barras inércia constante).

3.°) Tendo ficado equilibrado, agora, o nó C (Fig. II-20), voltamos a colocar a chapa 2, impedindo novas rotações do mesmo. O esquema da Fig. II-20 nos mostra, entretanto, que o nó B ficou desequilibrado. Para equilibrá-lo, liberamos, mais uma vez a rotação da chapa 1, ficando o nó submetido a uma carga-momento de (-3,36 mt), que é equilibrada por momentos iguais

```
+3,36 \cdot 0,36 = +1,21 mt, no nó B da barra AB +3,36 \cdot 0,60 = +2,15 mt, no nó B da barra BC
```

Para o nó C da barra BC, será transmitido um momento igual a (+2,15.0,5) = +1,07 mt.

4°) A fig. II-20 nos mostra o nó B equilibrado e o nó C desequilibrado. Temos, mais uma vez, uma situação idêntica à do item 2° deste exemplo, que será resolvida da mesma maneira, isto é: voltando a colocar a chapa 1 no nó B (em equilíbrio) e liberando a rotação do nó C, a carga-momento de (+1,07 mt) que passa a atuar neste último é equilibrada por momentos iguais a:

$$-1,07 \cdot 0,57 = -0,61$$
 mt e
-1,07 \cdot 0,43 = -0,46 mt, nas barras BC e CD, respectivamente,

e que provocam a transmissão de momentos iguais à metade (t = +0,5) de seus valores para os nós B e D.

- $5.^{\circ}$) Estando o nó C equilibrado e o nó B, agora, desequilibrado, voltamos à situação do ítem 3° e, sem necessidade de maiores comentários com a liberação da rotação do nó B, surgirão momentos equilibrantes de (+0.30 . 0.36) = +0.11 mt na barra AB e de (+0.30 . 0.64) = +0.19 mt na barra BC, este último transmitindo um momento de +0.09 mt ao nó C.
- $6.^{\circ}$) Prendendo o nó B, já equilibrado, mais uma vez, com a chapa 1 e liberando a rotação do nó C, a carga-momento de (+0,09 mt) a que ele ficará submetido será equilibrada por momentos de (-0,09 . 0,57) = -0,05 mt no nó C da barra BC e de (-0,09 . 0,043) = -0,04 mt no nó C da barra CD, sendo transmitido para os nós B e D momentos iguais à metade desses valores.
- 7.°) Estando o nó C equilibrado, voltamos a prendê-lo com a chapa 2 e liberamos, agora, a chapa 1, a fim de equilibrar o nó B. Devido à carga-momento de (-0,02 mt) que nele ficará atuando, surgirão momentos equilibrantes, nos nós B das barras AB e BC iguais a $(+0,02 \cdot 0,36) = +0,01$ mt e a $(+0,02 \cdot 0,64) = +0,01$ mt, respectivamente. Os valores destes momentos já são tão baixos, que não faremos nenhuma transmissão para o nó C e podemos dar, então, a viga da Fig. II-17 como equilibrada após este 4° equilíbrio do nó B.
- 8°) Para a obtenção dos momentos finais, devemos fazer a superposição (soma) de todos os momentos que apareceram nas diversas fases do equilíbrio da viga, o que pode ser feito, diretamente, na Fig. II-20, somando-se os valores indicados em coluna, obtendo-se os valores finais apresentados na última linha.

9°) Levando em conta a convenção de sinais da Fig. II-3, os momentos finais atuantes nos nós são os representados na Fig. II-28, da qual obtemos, imediatamente, o diagrama de momentos fletores da Fig. II-29.

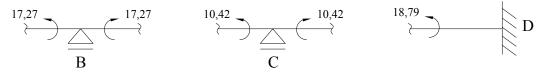


Figura II – 28 – Momentos finais (mt)

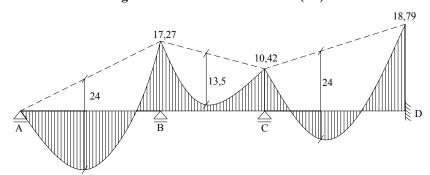


Figura II - 29 - DMF (mt)

Para cálculo das reações:

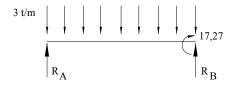
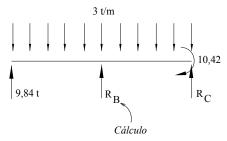
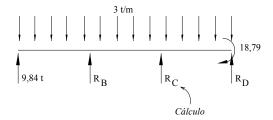


Figura II - 30

$$\begin{split} & \sum Y = 0 \\ & \sum M_B = 0 \ => \ R_A \;.\; 8 + 17,\!27 \;\text{--}\; 3 \;t/m \;.\; 8m \;.\; 4m = 0 \\ & R_A = 9,\!84 \;t. \end{split}$$





E, por fim,

$$R_D = 22 \text{ m} \cdot 3t/m - R_A - R_B - R_C$$

ELEMENTOS DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS DE MADEIRA E DE AÇO.

1 - Generalidades

Entende-se por estrutura, de uma construção, o conjunto de elementos destinados a observar esforços advindos de utilização desta construção.

Desta forma uma estrutura deve apresentar os seguintes requisitos básicos:

- Estabilidade geométrica
- Segurança
- Não causar efeitos psicológicos sobre o usuário.

A segurança de uma estrutura é obtida pela escolha adequada das seções, de seus diversos elementos, bem como do material de resistência adequada, de forma que a estrutura mantenha suas funções durante toda sua vida útil. A estrutura manterá suas funções enquanto suportar o carregamento que atua sobre ela, sem perder sua utilização. Uma boa avaliação do carregamento sobre a estrutura, acompanhado do correto dimensionamento dos elementos que a compõem, garante que a estrutura suportará este carregamento.

O efeito psicológico sobre o usuário pode se originar de uma falha de concepção arquitetônica, ou de uma falha de dimensionamento, devendo ser evitado em ambos os casos.

Em geral, o cálculo estrutural é executado na seguinte sequência de operações:

- Concepção arquitetônica.
- Escolha dos diversos esquemas estáticos, um para cada elemento estrutural da construção.
 - Avaliação do carregamento atuante em cada um destes elementos.
- Obtenção dos esforços solicitantes em cada um destes elementos, ou seja, como o carregamento é absorvido no interior de cada elemento.
- Obtenção das tensões atuantes máximas, em cada elemento, ou seja, como os esforços solicitantes são absorvidos por cada seção do elemento. Nesta fase as seções são adotadas para em seguida, próxima fase, serem verificadas.
- Escolher o material e verificar se as tensões atuantes máximas não superam as tensões resistidas pelo material utilizado na estrutura.
- Em seguida conclui-se sobre a necessidade de aumentar ou diminuir a seção adotada, refazendo-se os cálculos até que a seção adotada seja suficiente.
- Finalmente desenha-se, com detalhes, todos os elementos de estrutura, suas ligações e emendas, de modo a permitir sua construção tão próximo quanto possível do idealizado durante o cálculo estrutural.

2 - Esforços solicitantes

Os esforços solicitantes que aparecem em estruturas planas são: a força normal, ou simplesmente normal (N), que atua no sentido axial da peça perpendicular à seção; a força cortante, ou simplesmente cortante (Q), que atua no sentido transversal da peça "tentando rasgar" a seção; e o momento fletor, ou simplesmente momento (M), que atua normalmente à seção.

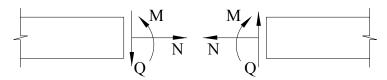


Figura - Esforços solicitantes M, N e Q no sentido positivo.

A seguir são apresentados os diagramas de esforços solicitantes, isto é, diagramas que representam a variação dos esforços solicitantes ao longo da estrutura, para os casos de ocorrência mais frequentes.

TABELA I Diagramas de esforços solicitantes (Notações utilizadas nos diagramas)

Н	=	reação de apoio (horizontal)
R	=	reação de apoio (vertical)
Q	=	esforço cortante
p	=	cargas uniformemente distribuídas
P e Q	=	cargas linearmente distribuídas
M	=	momento fletor
P, P ₁ , P ₂ , P ₃ , P ₄ , P ₅ e P ₆	=	cargas concentradas
f	=	deslocamento vertical (flecha)
7 (7.)	=	esforço solicitante (M, N, Q ou f) a uma distância
$Z_{x}(Z_{x1})$	_	genérica $x(X_1)$
$Z_{ ext{m\'ax}}$	=	esforço solicitante (M, N, Q ou f) máximo
a, b, c e ℓ	=	distâncias cotadas nos desenhos
α, β, γ, e δ	=	ângulos cotados nos desenhos
E	=	módulo de elasticidade do material
J=I	=	momento de inércia, em relação a linha neutra, da
J—1	_	seção da viga

a) Viga simplesmente apoiada - carga uniformemente distribuída.

$$R=Q=\frac{P\cdot \ell}{2}$$

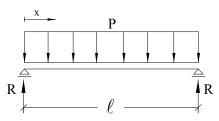
$$Q_{x} = p \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

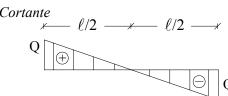
$$M_{máx}$$
 (no centro) = $\frac{P \cdot \ell^2}{8}$

$$M_x = \frac{P \cdot x}{2} \cdot \left(\ell - x\right)$$

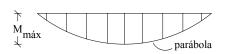
$$f_{\text{máx}}$$
 (no centro) = $\frac{5 \cdot P \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot J}$

$$f_{x} = \frac{P \cdot x \cdot (\ell^{3} - 2 \cdot \ell \cdot x^{2} + x^{3})}{24 \cdot E \cdot J}$$





Momento



b) Viga simplesmente apoiada - carga concentrada no centro.

$$R = Q = \frac{P}{2}$$

$$M_{m\acute{a}x}$$
 (no centro) = $\frac{P \cdot \ell}{4}$

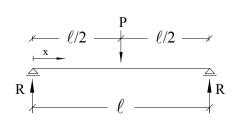
$$M_{x}\left(para \, x < \ell \, / \, 2\right) = \frac{P \cdot x}{2}$$

$$M_x\left(para\,x>\ell\,/\,2\right)\!=\!\frac{P}{2}\!\cdot\!\left(\ell-x\right)$$

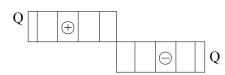
$$f_{\text{máx}}$$
 (no centro) = $\frac{P \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot J}$

$$f_x \left(para \ x < \ell / 2 \right) = \frac{P \cdot x}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \left(3 \cdot \ell^2 - 4 \cdot x^2 \right)$$

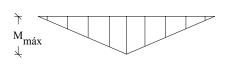
$$f_x(\text{para } x > \ell/2) = \frac{P \cdot (\ell - x)}{48 \cdot E \cdot J} \cdot \left[3 \cdot \ell^2 - 4 \cdot (\ell - x)^2 \right]$$



Cortante



Momento



c) Viga simplesmente apoiada - carga concentrada em qualquer ponto.

$$R_{1} = Q_{1} \text{ (máximose } a < b) = \frac{P \cdot b}{\ell}$$

$$R_{2} = Q_{2} \text{ (máximose } a > b) = \frac{P \cdot a}{\ell}$$

$$M_{máx} \text{ (no ponto da c arg a)} = \frac{P \cdot a \cdot b}{\ell}$$

$$Cortante$$

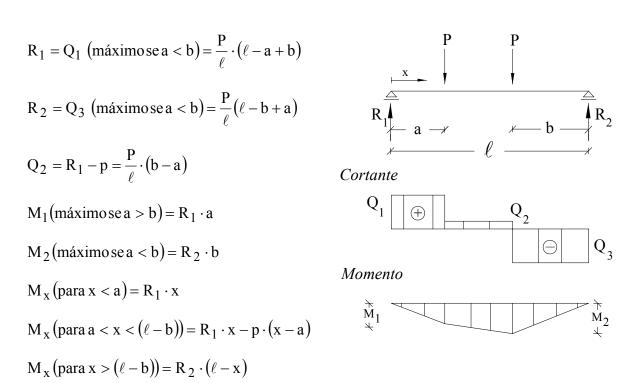
$$M_{x} \text{ (para } x < a) = \frac{P \cdot b \cdot x}{\ell}, \quad M_{x} \text{ (para } x > a) = \frac{P \cdot a}{\ell} \cdot (\ell - x)$$

$$Momento$$

$$f_{a} \text{ (no ponto da c arg a)} = \frac{P \cdot a^{2} \cdot b^{2}}{3 \cdot E \cdot J \cdot \ell}$$

$$f_{x} \text{ (para } x < a) = \frac{P \cdot b \cdot x}{6 \cdot E \cdot J \cdot \ell} \cdot (\ell^{2} - b^{2} - x^{2})$$

d) Viga simplesmente apoiada - duas cargas concentradas iguais em qualquer posição.



e) Viga engastada - carga uniformemente distribuída

$$R = Q - p \cdot \ell$$

$$H = 0$$
(zero)

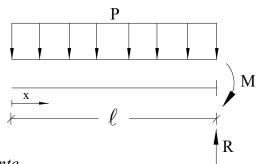
$$Q_x = p \cdot x$$

$$M = M_{m\acute{a}x} (no \, extremo \, fixo) = \frac{P \cdot \ell^2}{2}$$

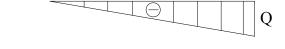
$$M_{x} = \frac{P \cdot x^{2}}{2}$$

$$f_{m\acute{a}x}$$
 (no extremo livre) = $\frac{P \cdot \ell^4}{E \cdot J}$

$$f_{x} = \frac{P}{24 \cdot E \cdot J} \cdot \left(x^{4} - 4 \cdot \ell^{3} \cdot x + 3 \cdot \ell^{4}\right)$$



Cortante



Momento parábola M_{máx}

f) Viga engastada - carga concentrada no extremo livre

$$R = Q = P$$

$$H = 0$$
(zero)

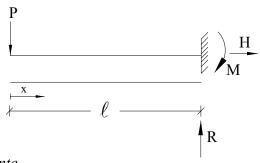
$$Q_x = cons tan te = P$$

$$M = M_{m\acute{a}x} \big(no \, extremo \, fixo \big) = P \cdot \ell$$

$$M_x = P \cdot x$$

$$f_{\text{máx}}$$
 (no extremo livre) = $\frac{P \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot J}$

$$f_{x} = \frac{P}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(2 \cdot \ell^{3} - 3 \cdot \ell^{2} \cdot x + x^{3} \right)$$



Cortante





g) Viga simplesmente apoiada com um balanço - carga concentrada no extremo do balanço.

$$R_1 = Q_1 = \frac{P \cdot 2}{\ell}$$

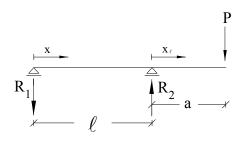
$$R_2 = Q_1 + Q_2 = \frac{P}{\ell} \cdot (\ell + a)$$

$$Q_2 = P$$

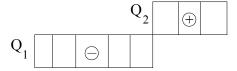
$$M_{m\acute{a}x}$$
 (em $x = \ell$. $x_{\ell} = 0$) = $p \cdot a$

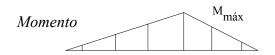
$$M_x$$
 (entre os apoios) = $\frac{P \cdot a \cdot x}{\ell}$

$$M_{x1}$$
 (no balanço) = $p \cdot (a - x_{\ell})$



Cortante





$$f_{\text{m\'ax}}\bigg(\text{entre os apoios em } x = \frac{1}{3}\bigg) = \frac{p \cdot a \cdot \ell^2}{E \cdot J} = 0,06415 \cdot \frac{P \cdot a \cdot \ell^2}{E \cdot J}$$

$$f_{m\acute{a}x}$$
 (no balanço em $x_{\ell} = a$) = $\frac{P \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot J} \cdot (\ell + a)$

$$f_x$$
 (entre os apoios) = $\frac{P \cdot a \cdot x}{6 \cdot E \cdot J \cdot \ell} \cdot (\ell^2 - x^2)$

$$f_{x1} \text{(no balanço)} = \frac{P \cdot x_1}{6 \cdot E \cdot J} \cdot \left(2 \cdot a \cdot \ell + 3 \cdot a \cdot x_1 - x_1^2 \right)$$

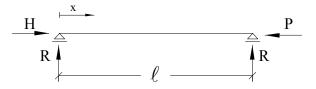
h) Viga simplesmente apoiada - carga, axial, concentrada no apoio móvel.

$$R = 0$$
(zero)

$$H = p$$

$$N = p = N_{m\acute{a}x}$$

$$N_x = -p$$



Normal



i) Viga simplesmente apoiada - carga, axial, concentrada em um ponto qualquer.

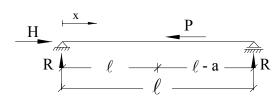
$$R = 0$$
(zero)

$$H = P$$

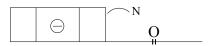
$$N = P = N_{m\acute{a}x}$$

$$N_x \left(\frac{p}{x} < a \right) = -P$$

$$N_x \left(\frac{p}{x} > a \right) = 0$$



Normal



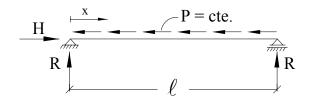
j) Viga simplesmente apoiada - carga, axial, uniformemente distribuída.

$$R = 0$$
(zero)

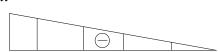
$$H = p \cdot \ell$$

$$N = p \cdot \ell = N_{m\acute{a}x}$$

$$N_x = p \cdot (x - \ell)$$



Normal



k) Viga engastada - carga, axial, concentrada no extremo livre.

$$R = 0$$
(zero)

$$M = 0$$
(zero)

H = P

$$N = P = N_{m\acute{a}x}$$

 $N_x = -P$



Normal

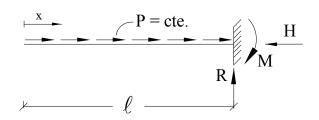
l) Viga engastada - carga, axial, uniformemente distribuída.

$$R = 0$$
(zero)
 $M = 0$ (zero)

$$H = p \cdot \ell$$

$$N = p \cdot \ell = N_{m\acute{a}x}$$

$$N_x = -p \cdot x$$



Normal



m) Arco tri-articulado atirantado - cargas concentradas.

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$H = 0$$
(zero)

$$R = P_1 + P_2 + P_{3/2}$$

$$N_1 = \frac{2P_2 + P_3}{2} \cdot \text{sen}\alpha$$
 (compressão)

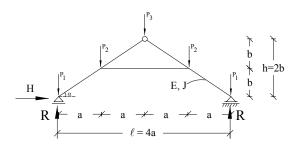
$$N_2 = \frac{P_3}{2 \cdot \text{sen}\alpha}$$
 (compressão)

$$N_3 = \frac{P_3}{2 \cdot tg\alpha}$$
 (tração)

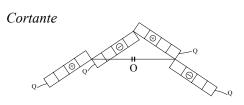
$$Q = \frac{2P_2 + P_3}{2} \cdot \cos \alpha$$

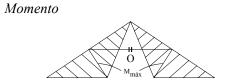
$$M_{m\acute{a}x} = \frac{2P_2 + P_3}{2} \cdot a$$

$$f_{\text{máx}} (\text{no centro}) = \frac{2 \cdot M_{\text{máx}} \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot J \cdot \cos \alpha}$$



Normal No





n) Vigas contínuas, com dois tramos, com carregamento uniformemente distribuído (diagramas aproximados).

$$R_1 = Q_1$$

$$R_2 = Q_2 + Q_3$$

$$R_3 = R_4$$

$$M_1 = \frac{p \cdot \ell_1^2}{11}$$

$$M_2 = \frac{p}{8} \cdot \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{2}\right)^2$$

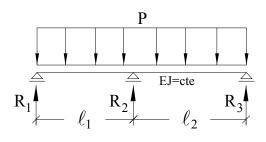
$$M_3 = \frac{p \cdot \ell_2^2}{11}$$

$$Q_1 = \frac{p \cdot \ell_1}{2} - \frac{M_2}{\ell_1}$$

$$Q_2 = \frac{p \cdot \ell_1}{2} + \frac{M_2}{\ell_1}$$

$$Q_3 = \frac{p \cdot \ell_2}{2} + \frac{M_2}{\ell_2}$$

$$Q_4 = \frac{p \cdot \ell_2}{2} - \frac{M_2}{\ell_2}$$



Momento M_1 M_2 M_3

Cortante Q_1 Q_2 Q_4

o) Viga com extremidade engastada e outra apoiada e carga concentrada em qualquer ponto.

$$R_1 = p \cdot \frac{{c_1}^2 \cdot \left(2 \cdot \ell - c\right)}{2 \cdot \ell^3}$$

$$R_2 = p \cdot \frac{c \cdot \left(3 \cdot \ell^2 - c^2\right)}{2 \cdot \ell^3}$$

$$M_{x} < c = P \cdot x \cdot \frac{{c_{1}}^{2} \cdot \left(2 \cdot \ell + c\right)}{2 \cdot \ell^{3}}$$

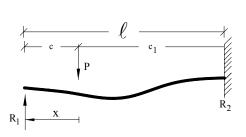
$$M_x > c = -\frac{Pc_1c \cdot \left(\ell + c\right)}{2 \cdot \ell^2} + R_2 \cdot \left(\ell - x\right)$$

$$Q_x < c = R_1$$

$$Q_x > c = R_2$$

$$f = 0,\!0098 \cdot \frac{P}{E \cdot J} \cdot \ell^3 \quad (\text{máx})$$

$$x = c = 0.414 \cdot \ell$$



Cortante



Momento



p) Viga com uma extremidade engastada e outra apoiada e carga uniformemente distribuída.

$$R_1 = \frac{3}{8} \cdot w \cdot \ell$$

$$R_2 = \frac{5}{8} \cdot w \cdot \ell$$

$$M_{x} < c = \frac{w \cdot x}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot \ell}{4} - x\right)$$

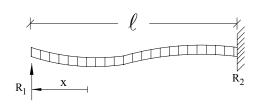
$$M_{m\acute{a}x} = \frac{w \cdot \ell^2}{8}$$

$$Q_x = \frac{3 \cdot w \cdot \ell}{8} - w \cdot x$$

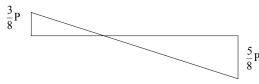
$$Q_{\text{m\'ax}} = \frac{5 \cdot w \cdot \ell}{8}$$

$$f = \frac{w \cdot \ell}{E \cdot J} \cdot \frac{\ell^3}{185} \quad (max)$$

$$x = 0.422 \cdot \ell$$



Cortante



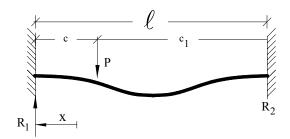
Momento



q) Viga com duas extremidades engastadas e carga concentrada em qualquer ponto.

$$R_1 = P \cdot \frac{c_1^2 (3 \cdot c + c_1)}{\ell^3}$$

$$R_2 = P \cdot \frac{c^2 (3 \cdot c_1 + c)}{\ell^3}$$



$$M_x < c = R_1 \cdot x - P \cdot \frac{c \cdot c_1^2}{\ell^2}$$

$$M_x > c = R_1 \cdot x - P \cdot \frac{c \cdot c_1^2}{\ell^2} - P \cdot (x - c)$$

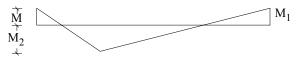


$$Q_x < c = R_1$$

$$Q_x > c = R_1 - P$$

$$f = \frac{2 \cdot P \cdot c^3 \cdot c_1^2}{3 \cdot E \cdot J \cdot (3 \cdot c + c_1)^2} \quad (m\acute{a}x)$$





s) Viga com duas extremidades engastadas e carregamento uniformemente distribuído.

$$R_1 = R_2 = \frac{w \cdot \ell}{2}$$

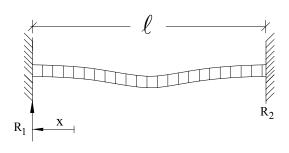
$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{w} \cdot \ell^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{\mathbf{x}}{\ell} + \frac{\mathbf{x}^2}{\ell^2} \right)$$

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{1}{12} \, w \cdot \ell^2$$

$$Q_x = \frac{w \cdot \ell}{2} - w \cdot x$$

$$Q_{\text{m\'ax}} = \frac{w \cdot \ell}{2}$$

$$f = \frac{P}{E \cdot J} \cdot \frac{\ell^3}{384} \quad (m\acute{a}x)$$



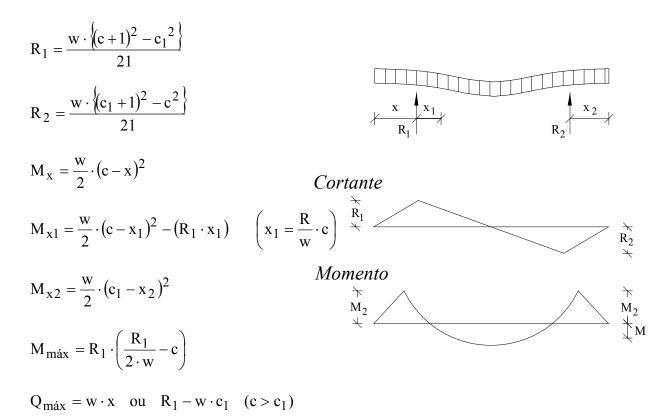
Cortante



Momento



t) Viga com duas extremidades em balanço e carga uniformemente distribuída.



3 - Características geométricas das seções planas

As características geométricas, de uma seção plana, são valores que dependem apenas da seção, e que auxiliam no cálculo das tensões atuantes, produzidas pelos esforços solicitantes.

As características geométricas de uma seção plana são:

$$S = \int ds \quad \text{seção cm}^2$$

$$M_S = \int y \, ds \quad \text{momento estático cm}^3$$

$$J = \int y^2 \, ds \quad \text{momento de inércia cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} \quad \text{raio de giro cm}$$

$$M_S = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

A seguir são apresentadas as características geométricas das seções planas de ocorrência mais frequentes

TABELA II Características geométricas das seções planas (Notações utilizadas na tabela)

a, b, h, d, c e r = distâncias cotadas nas figuras

> = ângulo cotado na figura W

= módulo de torção $\mathbf{w}_{\mathbf{t}}$

= módulo de flexão Wfx

S = área da seção transversal

= momento estático, para meia seção, em torno dos eixos x-x e y-y respectivamente Ms_{X-X} e Ms_{V-V}

 Ms_{a-a} = momento estático, da seção, em torno do eixo a-a

= momento de inércia, da seção, em torno dos eixos x-x, J_{X-X} , J_{V-V} e J_{a-a}

y-y e a-a respectivamente

= raio de giração, em torno dos eixos x-x e y-y respectivamente i_{X-X} e i_{V-V}

İmin = raio de giração mínimo = raio de inércia

= coordenadas do centro de gravidade, da seção composta, $x_g e y_g$

em relação aos eixos adotados x e y

... continuação da tabela II

 $\Delta xi e \Delta yi$

= coordenadas do centro de gravidade, do elemento i, em x_i e y_i

relação aos eixos adotados x e y

= área da seção transversal do elemento i S_i

momento de inércia do elemento i em relação aos eixos Ji_{X-X} e Ji_{V-V}

= que passam por seu centro de gravidade e paralelos aos

eixos x-x e y-y respectivamente

distância entre os centros de gravidade do elemento i e

= da seção composta, na direção dos eixos x-x e y-y

respectivamente

= Distribuição da fibra mais afastada do eixo neutro ν

a) Seção retangular

$$S = bh$$

$$M_{S_{X-X}} = \frac{bh^2}{8}$$
 $M_{S_{Y-Y}} = \frac{hb^2}{8}$

$$M_{Sy-y} = \frac{hb^2}{8}$$

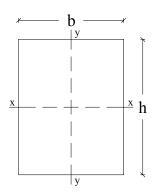
$$J_{x-x} = \frac{bh^3}{12}$$
 $J_{y-y} = \frac{hb^3}{12}$

$$J_{y-y} = \frac{hb^3}{12}$$

$$i_{x-x} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_{x-x} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$
 $i_{y-y} = \frac{b}{\sqrt{12}}$ $i_{min} = \frac{b}{\sqrt{12}}$

$$i_{min} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$



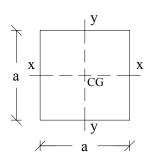
b) Seção quadrada

$$S = a^2$$

$$M_{S_{X-X}} = M_{S_{Y-Y}} = \frac{a^3}{8}$$

$$J_{x-x} = J_{y-y} = \frac{a^4}{12}$$

$$i_{x-x} = i_{y-y} = i_{min} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$



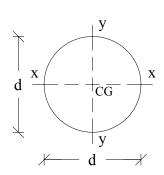
c) Seção Circular

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$M_{S_{X-X}} = M_{S_{Y-Y}} = \frac{d^3}{12}$$

$$J_{x-x} = J_{y-y} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$i_{x-x} = i_{y-y} = \frac{d}{4}$$



d) Seção quadrada

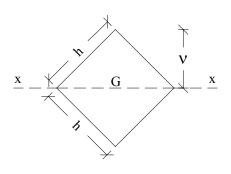
$$S = h^{2}$$

$$v = \frac{h}{\sqrt{2}} = 0,707 \,h$$

$$J_{x} = \frac{h^{4}}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{\sqrt{2} h^{3}}{12} = 0,117854 \,h^{3}$$

$$i_{x} = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,289 \,h$$



e) Perfil H

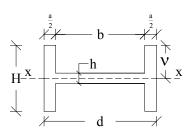
$$S = Hd - b(H - h)$$

$$v = \frac{H}{2}$$

$$J_{x} = \frac{aH^{3} - bh^{3}}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{aH^{3} - b(H - h)}{6H}$$

$$i_{x} = \sqrt{\frac{aH^{3} - ah^{3}}{12[(Hd - b(H - h))]}}$$



f) Perfil T-1

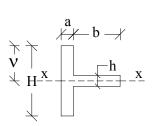
$$S = Ha - bH$$

$$v = \frac{H}{2}$$

$$J_x = \frac{aH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{aH^3 + bh^3}{6H}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{g}}$$



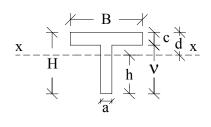
g) Perfil T-2

$$S = Bc + ha$$

$$v = H - \frac{1}{2} \frac{aH^2 + bc^2}{aH + bc}$$

$$J_{x} = \frac{1}{3} \Big[Bd^{3} - b(d-c)^{3} + av^{3} \Big]$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}}$$



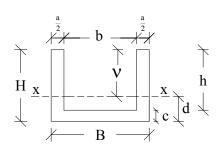
h) Perfil C

$$S = Hb - bh$$

$$v = H - \frac{1}{2} \frac{aH^2 + bc^2}{aH + bc}$$

$$J_{x} = \frac{1}{3} \Big[Bd^{3} - b(d-c)^{3} + av^{3} \Big]$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}}$$

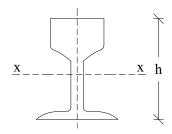


i) Trilho Vignolles (trilho para ferrovia, resultados aproximados)

$$S = 0.032h^4$$

$$W_{fx} = 0.064h^3$$

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}}$$



j) Perfil em cruz

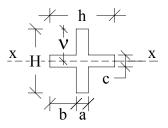
$$S = Ha + c(h - a)$$

$$v = \frac{H}{2}$$

$$J_x = \frac{aH^3 + 2(H - 2b)^3 b}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{2J_x}{H}$$

$$i_{x} = \frac{aH^{3} + 2(H - 2b)^{3}b}{12[aH + c(h - a)]}$$



k) Perfil quadrado oco

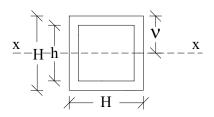
$$S = H^2 - h^2$$

$$v = \frac{H}{2}$$

$$J_{x} = \frac{H^{4} - h^{4}}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{H^4 - h^4}{6H}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}} = 0.289\sqrt{H^2 + h^2}$$

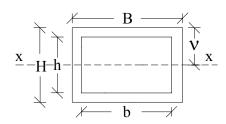


l) Perfil retangular oco

$$S = HB - bh$$

$$v = \frac{H}{2}$$

$$J_{x} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$



$$J_{y} = \frac{HB^{3} - hb^{3}}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{BH^{3} - bh^{3}}{6H}$$

$$i_{x} = \sqrt{\frac{BH^{3} - bh^{3}}{12(bH - bh)}} = 0,289\sqrt{\frac{BH^{3} - bh^{3}}{BH - bh}}$$

m) Perfil circular oco

$$S = \pi \left(\frac{D^2 - d^2}{4}\right) = 0,7854 \left(D^2 - d^2\right)$$

$$v = R$$

$$J_x = 0,7854 \left(R^4 - r^4\right)$$

$$J_x = 0,4d^3\delta, \text{ sendo } \delta \text{ a espessura, para } \frac{S}{d} \text{ pequeno}$$

$$W_{fx} = 0,7854 \left(\frac{R^4 - r^4}{R}\right)$$

$$i_x = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$$

n) Perfil I ou C aberto

$$S = HB - bh$$

$$v = \frac{H}{2}$$

$$J_{x} = \frac{BH^{3} - bh^{3}}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{BH^{3} - bh^{3}}{6H}$$

$$i_{x} = \sqrt{\frac{BH^{3} - bh^{3}}{12(BH - bh)}} = 0,289\sqrt{\frac{BH^{3} - bh^{3}}{BH - bh}}$$

o) Perfil C e S

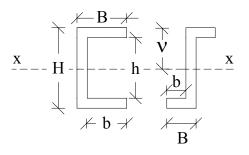
$$S = HB - bh$$

$$\nu = \frac{H}{2}$$

$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_{fx} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$$



p) Seção composta

Inicialmente calcula-se a posição de centro de gravidade da peça composta, adotando-se, arbitrariamente, um sistema de coordenadas x y.

$$x_{g} = \frac{\sum (x_{i} \cdot S_{i})}{\sum S_{i}} \qquad y_{g} = \frac{\sum (y_{i} \cdot S_{i})}{\sum S_{i}}$$

$$y_{g} = \frac{\sum (y_{i} \cdot S_{i})}{\sum S_{i}}$$

onde:

 x_g e y_g = posição do centro de gravidade geral;

 S_i = área de cada elemento.

Em seguida calculam-se os outros elementos, da seção composta, em relação aos eixos x-x e y-y, os quais passam pelo centro de gravidade:

$$S = \sum S_i$$

$$M_{S_{X-X}} = \sum (\Delta y_i \cdot S_i)$$
 (meia seção)

onde:

 Δy_i = distância do centro de gravidade de Si até o centro de gravidade geral.

$$J_{x-x} = \sum j_{i_{x-x}} + \sum \left(\Delta y_i^2 \cdot S_i \right)$$

onde:

ji _{x-x} = momento de inércia da seção individual.

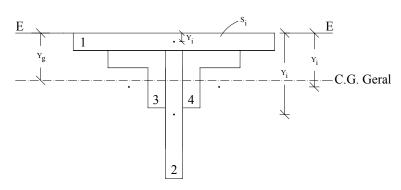
 Δy_i = distância do centro de gravidade geral até o centro de gravidade individual.

$$i_{x-x} = \sqrt{\frac{J_{x-x}}{S}} \qquad \quad J_{y-y} = \sum j_{i_{y-y}} + \sum \left(\Delta x_i^2 \cdot S_i \right) \qquad \quad i_{y-y} = \sqrt{\frac{J_{y-y}}{S}}$$

Observação: É conveniente calcular-se Si, Ji_{x-x} e Ji_{y-y} , para os elementos, no início do cálculo das características geométricas da seção composta.

Exemplo: Seja calcular as características da seção composta apresentada no desenho a seguir:

$$y_g = \frac{\sum (y_i \cdot S_i)}{\sum S_i}$$



Elemento	S _i (cm ²)	Y _i (cm)	Y _i .S _i	Δy_i (cm)	S_{i} . Δy_{i} (cm)	$S_{i}.\Delta y_{i}^{2}$ (cm^{4})	J _{iX-X} (cm)
1	34 . 1,2 = 40,8	$1,2 \div 2 = 0,6$	24,5	6 - 0.6 = 5.4	220,3	1.182,7	5,0
2	30 . 1,0 = 30,0	$(30 \div 2) + 1,2 = 16,2$	486,0	16,2 - 6 = 10,2	306,0	3.121,2	2.250,0
3 e 4	$2 \times 25,1^* = 50,2$	3,15+1,2=4,35	218,0	6 - 4,3 = 1,65	82,8	136,6	560,0*
Σ	121,0		728,5		609,1	4.447,5	2.815,0

^{*} Dados de tabelas para cantoneiras

$$S = 121 \text{cm}^{2}$$

$$y_{g} = \frac{\sum (y_{i} \cdot S_{i})}{\sum S_{i}}$$

$$y_{g} = \frac{728.5}{121} = 6.02 = 6 \text{ cm}$$

$$M_{S_{X-X}} = \sum (\Delta y_{i} \cdot S_{i}) = 609.31 \text{ cm}^{3}$$

$$J_{X-X} = \sum j_{i_{X-X}} + \sum (\Delta y_{i}^{2} \cdot S_{i}) = 2815 + 4447.50 = 7262.50 \text{ cm}^{4}$$

$$i_{X-X} = \sqrt{\frac{J_{X-X}}{S}} = \sqrt{\frac{7262.50}{121}} = 7.7 \text{ cm}$$

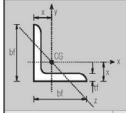
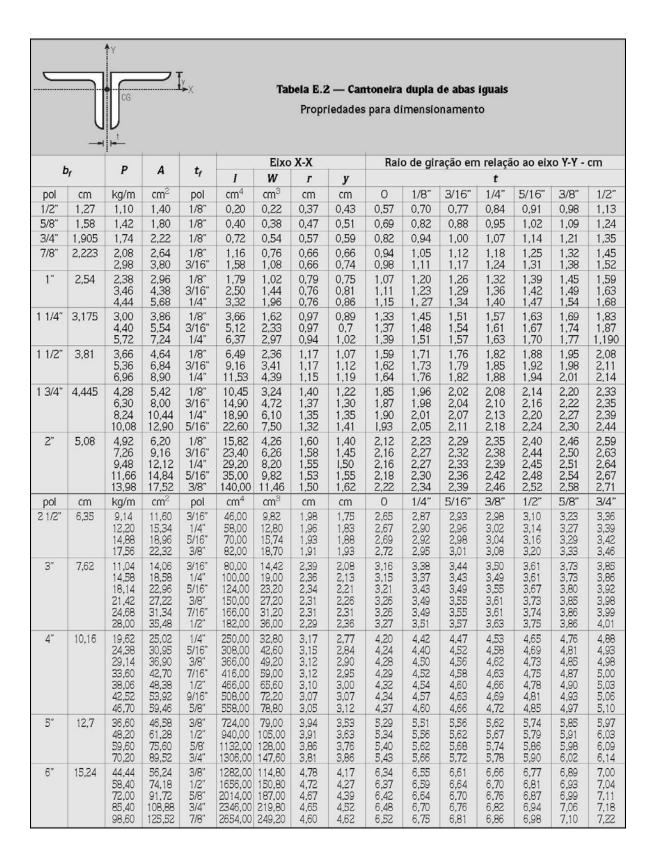
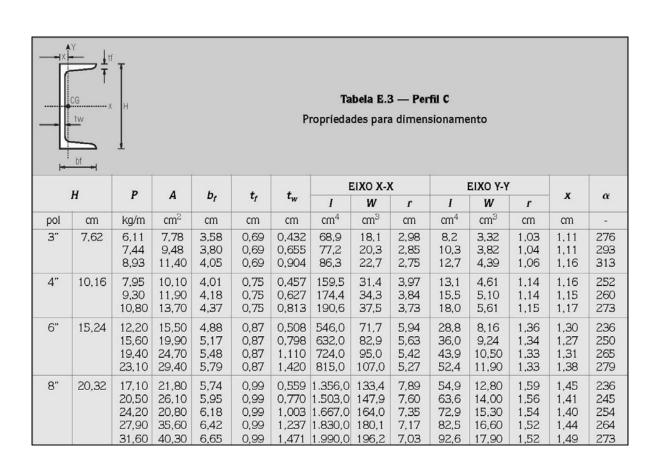


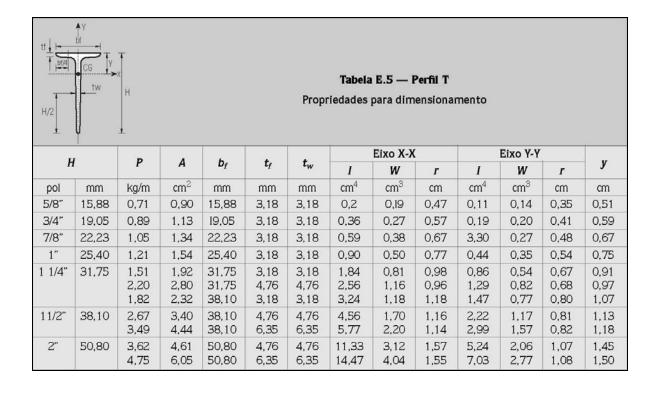
Tabela E.1 — Cantoneiras de abas iguais

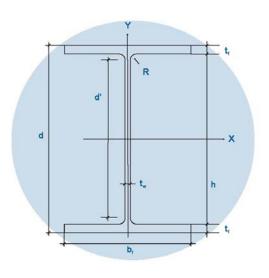
Propriedades para dimensionamento

b_f		P	A	1	t _f	$I_x = I_y$	$W_x = W_y$	$r_x = r_y$	$r_{z \text{min}}$	х	
pol	cm	kg/m	cm ²	pol	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm	
1/2"	1,270	0,55	0,70	1/8"	0,317	0,10	0,11	0,37	0,25	0,43	
5/8"	1,588	0,71	0,90	1/8"	0,317	0,20	0,19	0,47	0,32	0,51	
3/4"	1,905	0,87	1,11	1/8"	0,317	0,36	0,27	0,57	0,38	0,59	
7/8"	2,220	1,04 1,49	1,32 1,90	1/8" 3/16"	0,317 0,476	0,58 0,79	0,38 0,54	0,66 0,66	0,46 0,48	0,66 0,74	
1"	2,540	1,19 1,73 2,22	1,48 2,19 2,84	1/8" 3/16" 1/4"	0,317 0,476 0,635	0,83 1,25 1,66	0,49 0,66 0,98	0,79 0,76 0,76	0,48 0,48 0,48	0,76 0,81 0,86	
1 1/4"	3,175	1,50 2,20 2,86	1,93 2,77 3,62	1/8" 3/16" 1/4"	0,317 0,476 0,635	1,67 2,50 3,33	0,82 1,15 1,47	0,97 0,97 0,94	0,64 0,61 0,61	0,89 0,97 1,02	
1 1/2"	3,810	1,83 2,68 3,48	2,32 3,42 4,45	1/8" 3/16" 1/4"	0,317 0,476 0,635	3,33 4,58 5,83	1,15 1,64 2,13	1,17 1,17 1,15	0,76 0,74 0,74	1,07 1,12 1,19	
1 3/4"	4,445	2,14 3,15 4,12 5,04	2,71 4,00 5,22 6,45	1/8" 3/16" 1/4" 5/16"	0,317 0,476 0,635 0,794	5,41 7,50 9,57 11,20	1,64 2,30 3,13 3,77	1,40 1,37 1,35 1,32	0,89 0,89 0,86 0,86	1,22 1,30 1,35 1,41	
2"	5,080	2,46 3,63 4,74 5,83 6,99	3,10 4,58 6,06 7,42 8,76	1/8" 3/16" 1/4" 5/16" 3/8"	0,317 0,476 0,635 0,794 0,952	7,91 11,70 14,60 17,50 20,00	2,13 3,13 4,10 4,91 5,73	1,60 1,58 1,55 1,53 1,50	1,02 1,02 0,99 0,99 0,99	1,40 1,45 1,50 1,55 1,63	
2 1/2"	6,350	4,57 6,10 7,44 8,78	5,80 7,67 9,48 11,16	3/16" 1/4" 5/16" 3/8"	0,476 0,635 0,794 0,952	23,00 29,00 35,00 41,00	4,91 6,40 7,87 9,35	1,98 1,96 1,93 1,91	1,24 1,24 1,24 1,22	1,75 1,83 1,88 1,93	
3"	7,620	5,52 7,29 9,07 10,71 12,34 14,00	7,03 9,29 11,48 13,61 15,67 17,74	3/16" 1/4" 5/16" 3/8" 7/16" 1/2"	0,476 0,635 0,794 0,952 1,111 1,270	40,00 50,00 62,00 75,00 83,00 91,00	7,21 9,50 11,60 13,60 15,60 18,00	2,39 2,36 2,34 2,31 2,31 2,29	1,50 1,50 1,50 1,47 1,47 1,47	2,08 2,13 2,21 2,26 2,31 2,36	
4"	10,160	9,81 12,19 14,57 16,80 19,03 21,26 23,35	12,51 15,48 18,45 21,35 24,19 26,96 29,73	1/4" 5/16" 3/8" 7/16" 1/2" 9/16" 5/8"	0,635 0,794 0,952 1,111 1,270 1,429 1,588	125,00 154,00 183,00 208,00 233,00 254,00 279,00	16,40 21,30 24,60 29,50 32,80 36,10 39,40	3,17 3,15 3,12 3,12 3,10 3,07 3,05	2,00 2,00 2,00 1,98 1,98 1,98 1,96	2,77 2,84 2,90 2,95 3,00 3,07 3,12	
5"	12,700	18,30 24,10 29,80 35,10	23,29 30,64 37,8 44,76	3/8" 1/2" 5/8" 3/4"	0,952 1,270 1,588 1,905	362,00 470,00 566,00 653,00	39,50 52,50 64,00 73,80	3,94 3,91 3,86 3,81	2,51 2,49 2,46 2,46	3,53 3,63 3,76 3,86	
6"	15,240	22,22 29,20 36,00 42,70 49,30	28,12 37,09 45,86 54,44 62,76	3/8" 1/2" 5/8" 3/4" 7/8"	0,952 1,270 1,588 1,905 2,222	641,00 828,00 1.007,00 1.173,00 1.327,00	57,40 75,40 93,50 109,90 124,60	4,78 4,72 4,67 4,65 4,60	3,02 3,00 2,97 2,97 2,97	4,17 4,27 4,39 4,52 4,62	









LEGENDA

d = altura

b, = largura da aba

t, = espessura da alma

t,= espessura da aba

h = altura interna

d' = altura livre da alma

ÁREA = área da seção

R = raio de concordância

I = momento de inércia

W = módulo de resistência

r = raio de giração

Z = módulo de resistência plástico

rt = raio de giração em relação ao eixo Y-Y do T formado pela área da aba mais 1/6 da área da alma

I, = momento de inércia à torção

I,= esbeltez da aba

I_w = esbeltez da alma (parte plana)

C_w = constante de empenamento

u = área superficial por metro linear

PERFIS H	Massa			Espe	ssura			EIXO X - X		X - X			EIXO	Y - Y				ESBELTEZ				100	
BITOLA	Linear Kg/m	d mm	b, mm	t, mm	t, mm	h mm	ď' mm	Área cm³	Į, cm²	CM ₂	r, cm	Z, cm³	l, cm'	W, cm³	r, cm	Z _y ,	em	cm ⁴	ABA - λ, b, / 2t,	ALMA - ኢ. ያ / ኒ.	em,	m²/m	BITOLA
W 150 x 22,5	22,5	152	152	5,8	6,6	139	119	29,0	1.229	161,7	6,51	179,6	387	50,9	3,65	77,9	4,10	4,75	11,52	20,48	20.417	0,88	W 150 x 22,5
W 150 x 29,8	29,8	157	153	6,6	9,3	138	118	38,5	1.739	221,5	6,72	247,5	556	72,6	3,80	110,8	4,18	10,95	8,23	17,94	30.277	0,90	W 150 x 29,8
W 150 x 37,1	37,1	162	154	8,1	11,6	139	119	47,8	2.244	277,0	6,85	313,5	707	91,8	3,84	140,4	4,22	20,58	6,64	14,67	39.930	0,91	W 150 x 37,1
W 200 x 35,9	35,9	201	165	6,2	10,2	181	161	45,7	3.437	342,0	8,67	379,2	764	92,6	4,09	141,0	4,50	14,51	8,09	25,90	69.502	1,03	W 200 x 35,9
W 200 x 46,1	46,1	203	203	7,2	11,0	181	161	58,6	4.543	447,6	8,81	495,3	1.535	151,2	5,12	229,5	5,58	22,01	9,23	22,36	141.342	1,19	W 200 x 46,1
HP 200 x 53,0	53,0	204	207	11,3	11,3	181	161	68,1	4.977	488,0	8,55	551,3	1.673	161,7	4,96	248,6	5,57	31,93	9,16	14,28	155.075	1,20	HP 200 x 53,0
W 200 x 71,0	71,0	216	206	10,2	17,4	181	161	91,0	7.660	709,2	9,17	803,2	2.537	246,3	5,28	374,5	5,70	81,66	5,92	15,80	249.976	1,22	W 200 x 71,0
HP 250 x 62,0	62,0	246	256	10,5	10,7	225	201	79,6	8.728	709,6	10,47	790,5	2.995	234,0	6,13	357,8	6,89	33,46	11,96	19,10	414.130	1,47	HP 250 x 62,0
W 250 x 73,0	73,0	253	254	8,6	14,2	225	201	92,7	11.257	889,9	11,02	983,3	3.880	305,5	6,47	463,1	7,01	56,94	8,94	23,33	552.900	1,48	W 250 x 73,0
W 250 x 80,0	80,0	256	255	9,4	15,6	225	201	101,9	12.550	980,5	11,10	1.088,7	4.313	338,3	6,51	513,1	7,04	75,02	8,17	21,36	622.878	1,49	W 250 x 80,0
HP 250 x 85,0	85,0	254	260	14,4	14,4	225	201	108,5	12.280	966,9	10,64	1.093,2	4.225	325,0	6,24	499,6	7,00	82,07	9,03	13,97	605.403	1,50	HP 250 x 85,0
W 250 x 89,0	89,0	260	256	10,7	17,3	225	201	113,9	14.237	1.095,1	11,18	1.224,4	4.841	378,2	6,52	574,3	7,06	102,81	7,40	18,82	712.351	1,50	W 250 x 89,0
HP 310 x 79,0	79,0	299	306	11,0	11,0	277	245	100,0	16.316	1.091,3	12,77	1.210,1	5.258	343,7	7,25	525,4	8,20	46,72	13,91	22,27	1.089.258	1,77	HP 310 x 79,0
HP 310 x 93,0	93,0	303	308	13,1	13,1	277	245	119,2	19.682	1.299,1	12,85	1.450,3	6.387	414,7	7,32	635,5	8,26	77,33	11,76	18,69	1.340.320	1,78	HP 310 x 93,0
W 310 x 97,0	97,0	308	305	9,9	15,4	277	245	123,6	22.284	1.447,0	13,43	1.594,2	7.286	477,8	7,68	725,0	8,38	92,12	9,90	24,77	1.558.682	1,79	W 310 x 97,0
W 310 x 107,0	107,0	311	306	10,9	17,0	277	245	136,4	24.839	1.597,3	13,49	1.768,2	8.123	530,9	7,72	806,1	8,41	122,68	9,00	22,48	1.754.271	1,80	W 310 x 107,0
HP 310 x 110,0	110,0	308	310	15,4	15,5	277	245	141,0	23.703	1.539,1	12,97	1.730,6	7.707	497,3	7,39	763,7	8,33	125,66	10,00	15,91	1.646.104	1,80	HP 310 x 110,0
W 310 x 117,0	117,0	314	307	11,9	18,7	277	245	149,9	27.563	1.755,6	13,56	1.952,6	9.024	587,9	7,76	893,1	8,44	161,61	8,21	20,55	1.965.950	1,80	W 310 x 117,0
HP 310 x 125,0	125,0	312	312	17,4	17,4	277	245	159,0	27.076	1.735,6	13,05	1.963,3	8.823	565,6	7,45	870,6	8,38	177,98	8,97	14,09	1.911.029	1,81	HP 310 x 125,0
W 360 x 110,0	110,0	360	256	11,4	19,9	320	288	140,6	33.155	1.841,9	15,36	2.059,3	5.570	435,2	6,29	664,5	6,96	161,93	6,43	25,28	1.609.070	1,69	W 360 x 110,0
W 360 x 122,0	122,0	363	257	13,0	21,7	320	288	155,3	36.599	2.016,5	15,35	2.269,8	6.147	478,4	6,29	732,4	6,98	212,70	5,92	22,12	1.787.806	1,70	W 360 x 122,0

PERFIS I	Massa	15	180	Espes	sura					EIXO	X - X			EIXO	Y-Y				ESBI	ELTEZ		
BITOLA	Linear	d mm	b, mm	L	1,	h	d' mm	Área	L	W.	r,	Z,	L	W,,	P.	Z,	r, cm	cm ⁴	AMA - A.	ALMA - A	C u	m BITOLA
20000000	Kg/m			mm	mm				cm ⁴	cm,	cm	cm ²	cm ⁴	cm²	cm	cm"	-		h,/2t,	1/1		
W 150 x 13,0	13,0	148	100	4,3	4,9	138	118	16,6	635	85,8	6,18	96,4	82	16,4	2,22	25,5	2,60	1,72	10,20		4.181 0,6	
W 150 x 18,0	18,0	153	102	5,8	7,1	139	119	23,4	939	122,8	6,34	139,4	126	24,7	2,32	38,5	2,69	4,34	7,18	20,48	6.683 0,6	
W 200 x 15,0	15,0	200	100	4,3	5,2	190	170	19,4	1.305	130,5	8,20	147,9	87	17,4	2,12	27,3	2,55	2,05	9,62	39,44	8.222 0,7	
W 200 x 19,3	19,3	203	102	5,8	6,5	190	170		1.686	166,1	8,19	190,6	116	22,7	2,14	35,9	2,59	4,02	7,85	29,31	11.098 0,7	
W 200 x 22,5	22,5	206	102	6,2	8,0	190	170	-	2.029	197,0	8,37	225,5	142	27,9	2,22	43,9	2,63	6,18	6,38	27,42	13.868 0,7	
W 200 x 26,6	26,6	207	133	5,8	8,4	190	170	The state of the s	2.611	252,3	8,73	282,3	330	49,6	3,10	76,3	3,54	7,65	7,92	-	32.477 0,9	
W 200 x 31,3	31,3	210	134	6,4	10,2	190	170		3.168	301,7	8,86	338,6	410	61,2	3,19	94,0	3,60	12,59	6,57	26,50	40.822 0,9	
W 250 x 17,9	17,9	251	101	4,8	5,3	240	220	and the second second	2.291	182,6	THE PERSON NAMED IN COLUMN	211,0	91	18,1	1,99	28,8	2,48	2,54	9,53	45,92	13.735 0,8	NAME AND ADDRESS OF THE OWNER, WHEN PERSONS AND ADDRESS O
W 250 x 22,3	22,3	254	102	5,8	6,9	240	220		2.939	231,4		267,7	123	24,1	2,06	38,4	2,54	4,77	7,39	37,97	18.629 0,8	
W 250 x 25,3	25,3	257	102	6,1	8,4	240	220		3.473	270,2		311,1	149	29,3	2,14	46,4	2,58	7,06	6,07	36,10	22.955 0,8	
W 250 x 28,4	28,4	260	102	6,4	10,0	240	220		4.046	311,2		357,3	178	34,8	2,20	54,9	2,62	10,34	5,10	34,38	27.636 0,9	
W 250 x 32,7 W 250 x 38.5	32,7	258 262	146	6,1	9,1	240	220		4.937	382,7 462,4		428,5 517,8	473	64,8	3,35	99,7	3,86	10,44	8,02	36,03	73.104 1,0 93.242 1,0	
		266	148		13,0	240	220		6.057	-			594	80,8	3,46	124,1	3,93	17,63	6,56	33,27		
W 250 x 44,8 W 310 x 21,0	21,0	303	101	7,6 5,1	5,7	292	272		7.158 3.776	538,2 249,2		606,3 291,9	704	95,1	3,50	146,4 31,4	3,96	27,14	5,69 8,86	28,95 53,25	112.398 1,0 21.628 0,9	
W 310 x 23,8	23,8	305	101	5,6	6,7	292	272	-	4.346	285,0	-	333,2	116	22,9	1,94	36,9	2,42	4,65	7,54	48,50	25.594 0,8	
W 310 x 28,3	28,3	309	102	6,0	8,9	291	271		5.500	356.0		412,0	158	31,0	2,08	49.4	2,55	8,14	5,73	45,20	35.441 1,0	
W 310 x 32,7	32,7	313	102	6,6	10,8	291	271	-	6.570	419,8		485,3	192	37,6	2,13	59,8	2,58	12,91	4,72		43.612 1,0	The second secon
W 310 x 38,7	38.7	310	165	5.8	9,7	291	271		8.581	553,6		615,4	727	88,1	3.82	134.9	4,38	13,20	8,51	46,66	163.728 1,2	
W 310 x 44.5	44,5	313	166	6,6	11,2	291	271	000000000000000000000000000000000000000	9.997	638,8		712,8	855	103.0	3.87	158.0	4,41	19,90	7.41	41.00	194,433 1,2	
W 310 x 52,0	52.0	317	167	7,6	13.2	291	271	-	11.909	751,4	-	842,5	1.026	122.9	3,91	188.8	4,45	31.81	6.33	35,61	236.422 1.2	
W 360 x 32,9	32,9	349	127	5,8	8,5	332	308	-	8.358	479.0	_	547,6	291	45,9	2.63	72.0	3,20	9,15	7,47	53,10	84,111 1,1	
W 360 x 39,0	39,0	353	128	6,5	10,7	332	308		0.331	585,3	_	667,7	375	58,6	2,73	91,9	3,27	15,83	5,98	47,32	109.551 1,1	The second secon
W 360 x 44,0	44,0	352	171	6,9	9,8	332	308	The second name of the second	2.258	696,5	-	784,3	818	95,7	3,77	148,0	4,43	16,70	8,72	44,70	239.091 1,3	
W 360 x 51,0	51.0	355	171	7,2	11,6	332	308		4.222	801,2		899,5	968	113,3	3,87	174,7	4,49	24,65	7,37	42,75	284.994 1,3	
W 360 x 57,8	57.8	358	172	7.9	13,1	332	308		6.143		14,92	1.014.8	1.113	129,4	3,92	199,8	4,53	34,45	6.56	38,96	330.394 1,3	
W 360 x 64.0	64.0	347	203	7,7	13.5	320	288			1.031,1		1.145,5	1.885	185.7	4,80	284,5	5,44	44,57	7,52	37,40	523.362 1,4	The second secon
W 360 x 72,0	72,0	350	204	8,6	15,1	320	288			1.152,5		1.285.9	2.140	209,8	4.84	321,8	5,47	61,18	6,75	33,47	599.082 1,4	
W 360 x 79,0	79,0	354	205	9,4	16,8	320	288			1.283,2		1.437,0	2.416	235.7	4.89	361.9	5,51	82,41	6,10	30.68	685.701 1,4	
W 410 x 38,8	38,8	399	140	6,4	8,8	381	357	50,3 1	2.777	640,5	15,94	736,8	404	57.7	2.83	90.9	3,49	11,69	7,95	55.84	153.190 1,3	
W 410 x 46,1	46,1	403	140	7,0	11,2	381	357	59,2 1	5.690	778,7	16,27	891,1	514	73,4	2,95	115.2	3,55	20,06	6,25	50,94	196,571 1,3	3 W 410 x 46,1
W 410 x 53,0	53,0	403	177	7,5	10,9	381	357	68,4 1	8.734	929,7	16,55	1.052,2	1.009	114,0	3,84	176,9	4,56	23,38	8,12	47,63	387.194 1,4	8 W 410 x 53,0
W 410 x 60,0	60,0	407	178	7,7	12,8	381	357	76,2 2	1.707	1.066,7	16,88	1.201,5	1.205	135,4	3,98	209,2	4,65	33,78	6,95	46,42	467.404 1,4	9 W 410 x 60,0
W 410 x 67,0	67,0	410	179	8,8	14,4	381	357	86,3 2	4.678	1.203,8	16,91	1.362,7	1.379	154,1	4,00	239,0	4,67	48,11	6,22	40,59	538.546 1,5	0 W 410 x 67,0
W 410 x 75,0	75,0	413	180	9,7	16,0	381	357	95,8 2	7.616	1.337,3	16,98	1.518,6	1.559	173,2	4,03	269,1	4,70	65,21	5,63	36,80	612.784 1,5	61 W 410 x 75,0
W 460 x 52,0	52,0	450	152	7,6	10,8	428	404	66,6 2	21.370	949,8	17,91	1.095,9	634	83,5	3,09	131,7	3,79	21,79	7,04	53,21	304.837 1,4	7 W 460 x 52,0
W 460 x 60,0	60,0	455	153	8,0	13,3	428	404			1.127,6		1.292,1	796	104,1	3,23	163,4	3,89	34,60	5,75	50,55	387.230 1,4	9 W 460 x 60,0
W 460 x 68,0	68,0	459	154	9,1	15,4	428	404			1.300,7		1.495,4	941	122,2	3,28	192,4	3,93	52,29	5,00	44,42	461.163 1,5	0 W 460 x 68,0
W 460 x 74,0	74,0	457	190	9,0	14,5	428	404			1.462,4			1.661	174,8	4,18	271,3	4,93	52,97	6,55	44,89	811.417 1,6	34 W 460 x 74,0
W 460 x 82,0	82,0	460	191	9,9	16,0	428	404					1.836,4	1.862	195,0	4,22	303,3	4,96	70,62	5,97	40,81	915.745 1,6	W 460 x 82,0
W 460 x 89,0	89,0	463	192	10,5	17,7	428	404			1.775,6		2.019,4	2.093	218,0	4,28	339,0	5,01	92,49	5,42		1.035.073 1,6	
W 530 x 66,0	66,0	525	165	8,9	11,4	502	478			1.332,2			857	103,9	3,20	166,0	4,02	31,52	7,24	53,73	562.854 1,6	
W 530 x 72,0	72,0	524	207	9,0	10,9	502	478			1.525,5		1.755,9	1.615	156,0	4,20	244,6	5,16	33,41	9,50	53,13	1.060.548 1,8	31 51 51 51 51
W 530 x 74,0	74,0	529	166	9,7	13,6	502	478					1.804,9	1.041	125,5	3,31	200,1	4,10	47,39	6,10	49,26	688.558 1,6	The second secon
W 530 x 82,0	82,0	528	209	9,5	13,3	501	477					2.058,5	2.028	194,1	4,41	302,7	5,31	51,23	7,86	50,25	1.340.255 1,8	
W 530 x 85,0	85,0	535	166	10,3	16,5	502	478					2.099,8	1.263	152,2	3,42	241,6	4,17	72,93	5,03	46,41	845.463 1,6	
W 530 x 92,0	92,0	533	209	10,2	15,6	502	478			2.069,7		2.359,8	2.379	227,6	4,50	354,7	5,36	75,50	6,70	46,84	1.588.565 1,8	
W 610 x 101,0	101,0	603	228	10,5	14,9	573	541					2.922,7	2.951	258,8	4,76	405,0	5,76	81,68	7,65	51,54	2.544.966 2,0	
W 610 x 113,0	113,0	608	228	11,2	17,3	573	541			2.901,2		3.312,9	3.426	300,5	4,86	469,7	5,82	116,50	6,59	48,34	2.981.078 2,0	
W 610 x 125,0	125,0	612	229	11,9	19,6	573	541	THE RESERVE OF THE PERSON NAMED IN	-	3.241,3	Name and Address of the Owner, where	3.697,3	3.933	343,5	4,96	536,3	5,89	159,50	5,84	45,45	3.441.766 2,0	The second liverage and the se
W 610 x 155,0	155,0	611	324	12,7	19,0	573	541					4.749,1		665,6	7,38	1.022,6	8,53	200,77	8,53	42,60	9.436.714 2,4	
W 610 x 174,0	174,0	616	325	14,0	21,6	573	541	222,8 14	1./54	4.191,2	25,75	5.383,3	12.374	761,5	7,45	1.171,1	8,58	286,88	7,52	38,63	10.915.665 2,4	8 W 610 x 174,0

4 - Características dos materiais

Durante o cálculo é necessário verificar se as tensões atuantes na estrutura não superam as tensão resistidas pelo material. Na prática se utiliza de coeficientes de segurança para minorar a tensão resistida pelo material (admitindo que se erre contra a segurança na avaliação da qualidade do material) e para majorar as tensões atuantes ou esforços solicitantes que as originam (admitindo que se erre contra a segurança na avaliação do carregamento sobre a estrutura). Assim é usual a aplicação da seguinte equação:

$$\gamma_2 \cdot \sigma_{atuante} \leq \frac{1}{\gamma_1} \cdot \sigma_{material}$$

Esta expressão pode ser reduzida, criando o conceito de tensão admissível. Esta é a visão atual do cálculo de estruturas de madeiras.

$$\sigma_{admissivel} \leq \frac{1}{\gamma_3} \cdot \sigma_{material}$$

Diante do exposto, nota-se a necessidade de se conhecer as tensões admissíveis para as diversas solicitações dos materiais utilizados em estruturas de madeira (algumas espécies) de concreto (alguns traços ou dosagens) e de aço.

4.1 - Dimensionamentos de peças estruturais de madeira

Ao se iniciar o dimensionamento de peças de madeira, recomenda-se a utilização das unidades de força em kgf e de comprimento em cm. Isto evitará confusões com unidades, visto que as características do material são encontradas com estas unidades.

No Brasil, as tensões admissíveis da madeira são consideradas como médias típicas da espécie. As características admissíveis médias de algumas espécies são fornecidas na tabela 3, a seguir.

Notações utilizadas

 $E_{\rm m}$ = módulo de elasticidade da madeira

E_a = módulo de elasticidade para cargas acidentais

E_p = módulo de elasticidade para cargas permanentes

 σ_n = tensão admissível à compressão normal às fibras

 σ_c = tensão admissível à compressão paralela às fibras

 σ_t = tensão admissível à tração paralela às fibras

 σ_f = tensão admissível à flexão estática

 τ_f = tensão admissível de cisalhamento na flexão

 τ_{ℓ} = tensão admissível de cisalhamento nas ligações

 $\lambda_0 = \text{indice de esbeltez, acima do qual é aplicável a expressão}$

 ρ_{15} = peso específico da madeira seca ao ar (15% de umidade)

 ρ_{35} = peso específico da madeira verde (35% de umidade)

 $TABELA\ III$ Características admissíveis médias de algumas madeiras nacionais (kgf/cm^2)

Madeira	$E_m = E_a$	$E_{p} = \frac{2}{3}E_{m}$	$\bar{\sigma}_n$	-	λο	$-\sigma_t$	$- \sigma_{ m f}$	$-\frac{\tau_{\mathrm{f}}}{\tau_{\mathrm{f}}}$	$-rac{ au}{ au_\ell}$	ρ ₁₅	ρ ₃₅
Andiroba	116.000	77.330	22,5	75,0	75	118,4	118,4	9,7	14,6	0,72	0,78
Angelim araroba	102.100	68.060	20,5	68,8	74	93,9	93,9	6,4	9,6	0,63	0,75
Angelim rosa	144.300	92.200	30,2	100,6	73	179,7	179,7	13,0	19,4	0,80	0,87
Angico branco	106.800	71.200	20,7	69,0	76	129,5	129,5	12,7	18,9	0,70	0,76
Angico preto	166.800	111.200	42,8	142,7	66	234,8	234,8	19,7	29,6	1,05	1,08
Angico vermelho	102.400	68.270	24,9	83,5	67	139,6	139,6	14,5	21,9	0,89	0,96
Aroeira do sertão	150.000	100.000	44,9	150,0	61	203,0	203,0	18,8	28,4	1,21	1,25
Canela	112.800	75.200	21,6	71,8	76	120,0	120,0	10,6	16,0	0,66	0,73
Cedro	85.000	56.670	17,2	57,2	74	95,9	95,9	7,2	10,8	0,53	0,58
Cupiuba	130.700	87.130	29,5	98,3	70	136,5	136,5	11,7	17,6	0,81	0,88
Eucalipto citriodora	168.600	112.400	36,7	122,0	71	195,0	195,0	16,1	24,0	0,99	1,06
Ipê (ou piuva)	147.800	98.530	39,3	132,0	64	211,0	211,0	14,8	22,2	0,96	1,00
Itauba	145.000	96.660	34,8	116,3	67	175,4	175,4	12,1	18,2	0,96	1,00
Jatobá	151.300	100.870	40,8	136,5	64	201,3	201,3	29,0	43,6	0,96	1,00
Jutai-açu	150.000	100.000	42,0	140,0	63	195,0	195,0	17,9	26,9	0,95	1,03
Peroba de campos	105.300	70.200	27,5	92,0	65	148,0	148,0	11,9	17,9	0,72	0,78
Peroba rosa	94.100	62.700	25,5	85,0	64	135,0	135,0	12,1	18,2	0,78	0,84
Pinho do paraná	109.300	72.860	16,0	53,5	87	91,0	91,0	6,1	9,0	0,54	0,60
Madeira comp. estrutural	90.000	60.000	15,0	85,0	63	85,0	85,0	8,5	12,5	0,70	0,80

a) Roteiro: madeira à compressão paralela - flambagem

 $1^{\rm o}$ Passo) Obter o esforço normal máximo, $N_{\text{máx}},$ traçando, se necessário, o diagrama de força normal.

 2° Passo) Adotar uma seção para verificação e obter a área da seção transversal, S, e o raio de giração mínimo, i_{min} .

3º Passo) Identificar o comprimento de flambagem, ℓ_{FL} , e calcular o índice de esbeltez, λ , por:

$$\lambda = \frac{\ell_{FL}}{i_{min}}$$

O comprimento de flambagem, ℓ_{FL} , é função do esquema estático e para estruturas de madeira é adotado conforme indicação da figura a seguir.

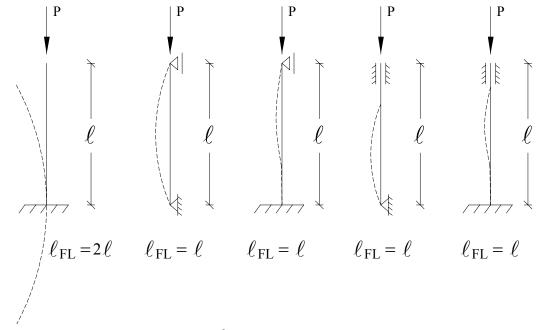


Figura 4 - Comprimentos de flambagem (ℓ_{FL}), adotados para a madeira, conforme o esquema estático.

 4^{o} Passo) Obter a tensão admissível de flambagem, σfl , função do índice de esbeltez, λ , e de características da espécie de madeira.

a) Se λ < 40, peça curta, então:

$$\overline{\sigma}_{FL} = \overline{\sigma}_{c}$$

b) Se $40 < \lambda < \lambda_0$, peça intermediária, então:

$$\overline{\sigma}_{FL} = \overline{\sigma}_{c} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 40}{\lambda_{o} - 40} \right)$$

c) Se $\lambda_0 < \lambda < 140$, peça longa, então:

$$\overline{\sigma}_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E_m}{4\lambda^2}$$

- d) Peças com $\lambda > 140$, também peças longas, tem sua utilização desaconselhada para cálculo e execução de estruturas de madeira (Norma Brasileira). Nesta situação devem-se aumentar as dimensões da seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
 - 5º Passo) Calcular a tensão atuante máxima, σ_{at} , por:

$$\sigma_{at} = \frac{N_{m\acute{a}x}}{S}$$

- 6º Passo) Comparar a tensão atuante, σ_{at} , com a tensão admissível, $\overline{\sigma}_{FL}$, concluindo sobre a seção da peça.
- a) Se $\sigma_{at} > \overline{\sigma}_{FL}$, então a seção é insuficiente para resistir aos esforços. Neste caso devem-se aumentar as dimensões da seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- b) Se σ_{at} for muito menor que $\sigma_{FL}(\sigma_{at} << \sigma_{FL})$ a seção resiste aos esforços, entretanto é maior que o necessário tornando a solução anti-econômica. Neste caso deve-se diminuir a seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- c) Se σ_{at} for aproximadamente igual, entretanto menor que $\overline{\sigma}_{FL} (\sigma_{at} \approx \overline{\sigma}_{FL})$, então a seção adotada é uma boa solução para o problema.

Observação: No caso de peças de seção composta, recomenda-se a ligação entre seus elementos, a cada $40.i'_{min}$, onde:

 $i'_{min} = o$ menor i_{min} dentre os dos elementos.

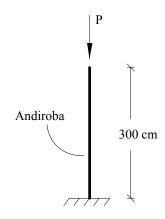
A título de esclarecimento, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação.

Exemplo: Qual a carga máxima de compressão, resistida por um pilar simplesmente engastado, com 3,00m de altura, seção de 15x15cm², de Andiroba?

1)
$$N_{m\acute{a}x} = P$$

2)
$$S = a^2 = 15^2 = 225 \text{ cm}^2$$

$$i_{min} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{15}{\sqrt{12}} = 4,33 \,\text{cm}$$



3)
$$\ell_{\text{FL}} = 2 \cdot \ell = 2 \cdot 300 = 600 \,\text{cm}$$

$$\lambda = \frac{\ell_{FL}}{i_{min}} = \frac{600}{4,33} = 138,57$$

4)
$$\sigma_c = 75.0 \, \text{kgf} / \text{cm}^2$$

 $\lambda_o = 75 \text{ e E}_m = 116\ 000 \text{ kgf/cm}^2$ (ver tabela para a Andiroba)

No caso, λ o < 138,57 < 140, peça longa, então:

$$\overline{\sigma}_{FL} = \frac{\pi^2 \cdot E_m}{4\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 116000}{4(138,57)^2} = 14,90 \,\text{kgf}/\text{cm}^2$$

5)
$$\sigma_{at} = \frac{N_{m\acute{a}x}}{S} = \frac{P}{225} kgf/cm^2 \text{ (para Pem kgf)}$$

6) Conclusão

 $\sigma_{at} \approx \overset{-}{\sigma}_{FL},$ para que a seção adotada seja boa solução

$$\frac{P}{225} \approx 14,90 \, \text{kgf} \, / \, \text{cm}^2$$

$$P \approx 225 \cdot 14,90 = 3352,50 \text{ kgf}$$

A carga, de compressão, no pilar deste exemplo não pode superar 3.352,5 kgf.

b) Roteiro: madeira à tração paralela

1º Passo) Obter o esforço normal máximo, $N_{\text{máx}}$, traçando se necessário, o diagrama de força normal.

2º Passo) Adotar uma seção para verificação e obter a área da seção transversal, S.

- 3° Passo) Obter a área útil, S_u , ou seja, a área da seção transversal que efetivamente absorve o esforço normal.
- a) Se as ligações da peça forem desconhecidas, então, reserva-se parcela da seção da barra para posteriormente executarem-se estas ligações. Neste caso adota-se:

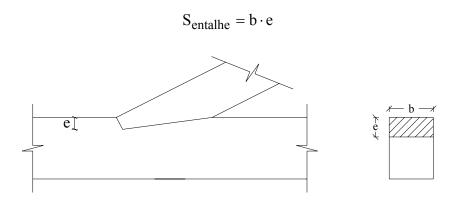
$$S_{11} = 0.7 \cdot S$$

b) Se as ligações da peça forem conhecidas, pode-se calcular a área útil, descontando-se a área utilizada nos furos e entalhes da ligação.

$$S_u = S - S_{furos\ e\ entalhes}$$

Observação: Para cálculo da área de furos e entalhes deve-se proceder conforme segue:

Entalhe (Ligação com dente)



Furos (de pregos ou parafusos)

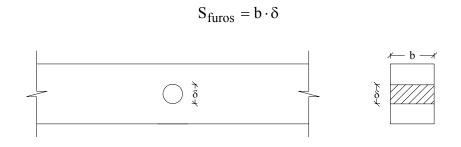


Figura 5 - Área de furos e entalhes

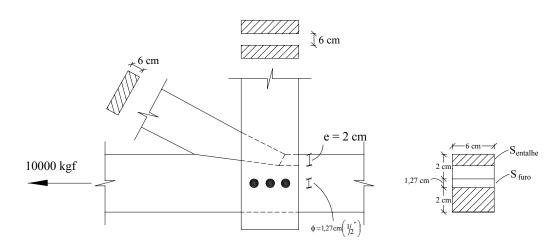
4º Passo) Calcular a tensão atuante máxima, σ_{at} , por:

$$\sigma_{at} = \frac{N_{m\acute{a}x}}{S_{u}}$$

- 5º Passo) Comparar a tensão atuante, σ_{at} , com a tensão admissível à tração paralela, $\overset{-}{\sigma_t}$, concluindo sobre a seção da peça.
- a) Se $\sigma_{at} > \overline{\sigma_t}$, então a seção é insuficiente para resistir aos esforços. Neste caso deve-se aumentar as dimensões da seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- b) Se σ_{at} for muito menor que $\overset{-}{\sigma_t}(\sigma_{at} << \overset{-}{\sigma_t})$ a seção resiste aos esforços, entretanto é maior que o necessário tornando a solução anti-econômica. Neste caso deve-se diminuir a seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- c) Se σ_{at} for aproximadamente igual, entretanto menor, que $\overline{\sigma}_t (\sigma_{at} \approx \overline{\sigma}_t)$, então a seção adotada é uma boa solução para o problema.

A título de esclarecimento, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação:

Exemplo: Escolher a seção de uma barra de Jutai-açu, sabendo-se que a largura da barra, por motivos construtivos, é de 6cm, que o esforço de tração máximo na barra é de 10 000 kgf e que a esta barra estão ligadas duas outras que enfraquecem sua seção, ocupando na posição mais crítica, 3,27 cm de sua altura total.



1)
$$N_{m\acute{a}x} = 10\ 000\ kgf$$

2)
$$S = 6 \cdot h \text{ cm}^2$$

3)
$$S_u = ?$$

No caso, a ligação é conhecida, assim:

$$S_u = S - S_{furos\ e\ entalhes}$$

$$S_{\text{entalhe}} = 6 \cdot 2 = 12 \,\text{cm}^2$$

$$S_{\text{furos}} = 6 \cdot 1,27 = 7,62 \text{ cm}^2$$

$$S_{furos\ e\ entalhe} = 19,62 \, cm^2$$

$$S_{11} = 6h - 19,62 \text{ cm}^2 \text{ (para h em cm)}$$

4)
$$\sigma_{at} = \frac{N_{m\acute{a}x}}{S_u} = \frac{10000}{6h - 19,62} \, kgf \, / \, cm^2 \, \left(para \, h \, em \, cm \right)$$

5) Conclusão:

 $\sigma_{at} < \overset{-}{\sigma_t}\,$ para que a seção adotada, seja boa solução.

$$\overline{\sigma}_t = 195 \,\mathrm{kgf} / \mathrm{cm}^2 \,\mathrm{(tabela \, para \, o \, Jutaí \, - \, açu)}$$

$$\frac{10000}{6h - 19.62} \le 195$$

$$6h \ge \frac{10000}{195} + 19,62 \approx 70,91$$

$$h \ge \frac{70,91}{6}$$

$$h \approx 11,82 \text{ cm}$$

Pode-se adotar para a barra em questão, uma seção de 6 x 12cm², ou seja, a seção comercial de altura imediatamente superior a 11,82cm.

c) Roteiro: madeira à flexão

A existência de momento fletor em uma peça de madeira indica uma solicitação por flexão, que pode ser flexão simples, quando a força normal for nula; flexo-compressão, quando o momento é acompanhado de força normal de compressão; e flexo-tração, quando a força normal é de tração. O dimensionamento de peças de madeira, submetidas à flexão, pode ser executado conforme roteiro a seguir:

1º Passo) Adotar uma seção para verificação, obtendo: a área da seção transversal, S; o momento estático, M_S, em torno do eixo perpendicular ao plano de cargas; e o momento de inércia, J, em relação a este eixo (ver tabela). E ainda identificar: a largura da seção, b, na posição do centro de gravidade; a distância da borda comprimida, ymáx- ao centro de gravidade; e a distância da borda tracionada, ymáx+, ao centro de gravidade.

Observação: A borda tracionada é determinada pelo lado em que se apresenta o diagrama de momentos, pois convencionou-se desenhar o diagrama de momentos do lado tracionado. Evidentemente, a borda comprimida é a outra. A figura abaixo exemplifica que valores adotar para b, ymax-, ymax+, M_S e J.

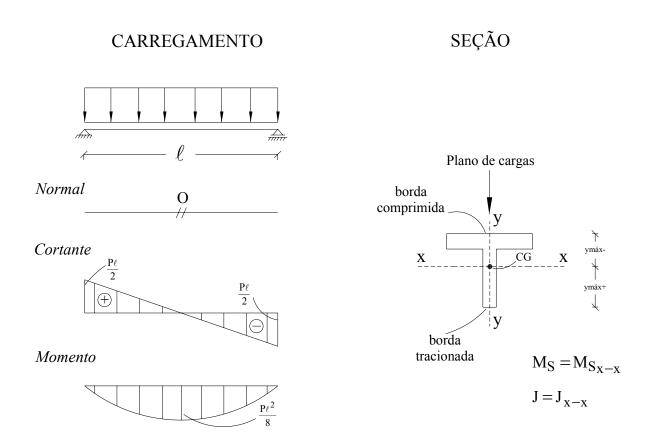


Figura 6 - Características geométricas de uma seção fletida

 $2^{\rm o}$ Passo) Obter a força normal máxima, $N_{\text{máx}}$; a força cortante máxima, $Q_{\text{máx}}$, e o momento fletor máximo, $M_{\text{máx}}$, traçando os diagramas de M, N e Q se necessário (ver tabela). Obter também os deslocamentos verticais, ou flechas, máximos, fmax, utilizando o formulário da tabela correspondente, substituindo o valor de E por E_p ou E_a , conforme o carregamento seja permanente ou acidental. A existência de cargas permanentes e acidentais atuando simultaneamente indica uma flecha máxima de:

$$f_{\text{máx}} = f_p + f_a$$

onde:

 $f_p = \frac{\text{flecha, no ponto de flecha máxima, devido ao}}{\text{carregamento permanente}} \label{eq:fp}$

 $f_a = \frac{\text{flecha, no ponto da flecha máxima, devido ao}}{\text{carregamento acidental}}$

3º Passo) Verificar se a tensão, normal, atuante máxima, σ_{at} , não supera a tensão admissível à flexão, σ_f .

a) Casos de flexão simples, força normal nula

$$\sigma_{at} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{J} ym\acute{a}x \le \frac{-}{\sigma_f}$$

onde:

ymáx = maior entre ymáx - e ymáx+

b) Casos de flexo-compressão, força normal de compressão

$$\sigma_{at} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{J} (ym\acute{a}x -) + \left(\frac{N_{m\acute{a}x}}{S}\right) \le \frac{-}{\sigma_f}$$

c) Casos de flexo-tração, força normal de tração

Inicialmente deve-se calcular a área útil, Su (ver roteiro: Madeira à tração) por:

$$S_u = S - S_{furos\ e\ entalhes}$$
 ou $S_u = 0.7 \cdot S$

Em seguida faz-se a verificação:

$$\sigma_{at} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{J} (ym\acute{a}x +) + \left(\frac{N_{m\acute{a}x}}{S}\right) \le \frac{-}{\sigma_f}$$

4º Passo) Verificar se a tensão de cisalhamento atuante máxima, τ_{at} , não supera a tensão admissível de cisalhamento na flexão, τ_{f} . (ver tabela)

$$\tau_{at} = \frac{Q_{m\acute{a}x} \cdot M_S}{b \cdot J} \le \bar{\tau}_f$$

5º Passo) Verificar se a flecha máxima, $f_{m\acute{a}x}=f_p+f_a$, que ocorrerá na estrutura, não causará efeito psicológico desagradável ao usuário, isto é, não supere a flecha admissível, recomendada pelas normas brasileiras, $\bar{f}=\frac{\ell}{350}$.

$$f_{\text{máx}} = f_p + f_a \le \overline{f} = \frac{\ell}{350}$$

onde:

 $\ell=\frac{\text{v\~{a}o}}{\text{dist\^{a}ncia}}$ entre centros de apoios

6º Passo) Concluir sobre a seção da peça.

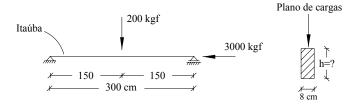
- a) Se qualquer das verificações não for satisfeita, isto é, $\sigma_{at} > \overline{\sigma}_f$, ou $\tau_{at} > \overline{\tau}_f$, ou $\tau_{max} > \overline{\tau}_f$, então a seção é insuficiente para resistir aos esforços. Neste caso a seção deve ser aumentada e o problema refeito, aproveitando-se parte do segundo passo $(N_{max}, M_{max} \ e \ Q_{max})$.
- b) Se as três verificações resultarem muito menores que os respectivos valores admissíveis, então a seção resiste aos esforços, entretanto é maior que o necessário, tornando a solução anti-econômica. Neste caso deve-se diminuir a seção e refazer o problema.
- c) Se as três verificações forem satisfeitas e pelo menos uma delas for aproximadamente igual, entretanto menor que o respectivo valor admissível, então a seção adotada é boa solução para o problema.

Observação: A zona comprimida de vigas fletidas pode provocar perda de estabilidade lateral. Para evitar este fenômeno recomenda-se a não utilização de vigas com largura, b, muito finas, em relação a altura, h (recomenda-se utilizar $b/h \ge 1/4$); e em casos especiais a utilização de contraventamentos, ou travamentos, transversais à viga espaçados de aproximadamente 11,5.b.

A título de esclarecimento, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação.

Exemplo: O escoramento de uma vala, durante a construção de um duto de águas pluviais, será construído de Itaúba. A viga superior deste escoramento é simplesmente apoiada, com 3m de comprimento, e suportará o peso de dois operários no centro, caso crítico, 200 kgf, além de uma carga de compressão de 3000 kgf devido o empuxo de terreno. Sendo a largura da viga, por motivos construtivos, de 10 cm, qual deverá ser a altura desta viga?

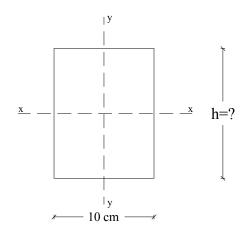




ESCORAMENTO

ESQUEMA ESTÁTICO PREVISTO

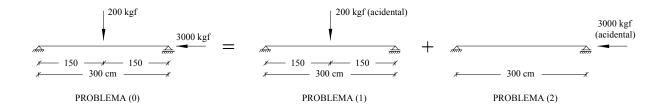
1) Sendo h em cm, tem-se $S = b.h \text{ cm}^2 = 10.h \text{ cm}^2.$ b = 10 cm. $ym\acute{a}x - gamma = h/2 \text{ cm}$ $ym\acute{a}x + gamma = h/2 \text{ cm}$



$$M_S = M_{S_{X-X}} = \frac{bh^2}{8} = \frac{10h^2}{8} = 1,25h^2 \text{ cm}^3$$

$$J = J_{x-x} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10h^3}{12} = 0.833h^3 \text{ cm}^4$$

Os esforços solicitantes, da viga em questão, podem ser obtidos pela superposição de dois problemas mais simples, tabelados.



Desta forma os esforços no problema (O), dado, serão:

$$N(_0) = N(_1) + N(_2)$$

$$Q(_0) = Q(_1) + Q(_2)$$

$$M(_0) = M(_1) + M(_2)$$

$$f(0) = f(1) + f(2)$$

Para o problema (1), da tabela, obtém-se:

$$N_{max} = 0 \text{ kgf}$$

$$Q_{\text{máx}} = \frac{P}{2} = \frac{200}{2} = 100 \,\text{kgf}$$

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{P \cdot \ell}{4} = \frac{200 \cdot 300}{4} = 15000 \, kgf \cdot cm$$

 E_p = 96.660 kgf/cm², E_a = 145.000 kgf/cm² (tabela, para a Itaúba)

$$f_{\text{máx}} = \frac{P \cdot \ell^3}{48 \cdot E_a \cdot J} = \frac{200 \cdot 300^3}{48 \cdot 145000 \cdot 0.833 h^3} = \frac{931,407}{h^3} \text{cm (para h em cm)}$$

Para o problema (2), da tabela, obtém-se:

$$N_{m\acute{a}x} = P = 3000 \text{ kgf (compressão)}$$

$$Q_{m\acute{a}x} = 0 \text{ kgf}$$

$$M_{m\acute{a}x} = 0 \text{ kgf.cm}$$

$$f_{max} = 0 \text{ cm}$$

Resultando, para o problema (0):

$$N_{m\acute{a}x} = 0 + 3.000 = 3~000~kgf$$
 (compressão)

$$Q_{max} = 100 + 0 = 100 \text{ kgf}$$

$$M_{max} = 15\ 000 + 0 = 15\ 000\ kgfcm$$

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{931,407}{h^3} + 0 = \frac{931,407}{h^3} cm$$

3) Verificação de σ_{at} ?

A existência de força normal de compressão indica o caso de flexo-compressão,

assim:

$$\sigma_{at} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{J} \left(y m\acute{a}x - \right) + \left(\frac{N_{m\acute{a}x}}{S} \right) \le \frac{-}{\sigma_f}$$

$$\overline{\sigma}_{\rm f} = 175,4\,{\rm kgf/cm^2}$$
 (tabela, Itaúba)

$$\sigma_{at} = \frac{15000}{0.833h^3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{3000}{10h} \le \frac{-}{\sigma_f} = 175,4 \, \text{kgf/cm}^2$$

$$\frac{9003,6}{h^2} + \frac{300}{h} \le 175,4$$

$$h = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$h^2 - 1,7104h - 51,332 > 0$$

$$h \ge 8.071$$
cm

4) Verificação do τ_{at}

$$\tau_{at} = \frac{Q_{m\acute{a}x} \cdot M_S}{b \cdot J} \le \bar{\tau}_f$$

$$\tau_{at} = 12.1 \, kgf \, / \, cm^2 (tabela, Itaúba)$$

$$\tau_{at} = \frac{100 \cdot 1,25 h^2}{10 \cdot 0.833 h^3} \le \bar{\tau}_f = 12,1 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\frac{15,006}{h} \le 12,1$$

 $h \ge 1,240 \, cm$

5) Verificação de f_{máx}

$$f_{\text{máx}} = f_p + f_a \le \overline{f} = \frac{\ell}{350}$$

$$f_{\text{máx}} = \frac{931,407}{h_3} \le \overline{f} = \frac{300}{350}$$

$$f_{\text{máx}} = \frac{931,407}{h_3} \le 0,857$$

 $h \ge 10,281 \text{ cm}$

6) Conclusão

As verificações acima resultaram:

- * Para que $\sigma_{at} \leq \sigma_f$, então : $h \geq 8,071$ cm
- * Para que $\tau_{at} \leq \bar{\tau}_f$, então : $h \geq 1,240$ cm
- * Para que $f_{m\acute{a}x} \leq f, então$: $h \geq 10,281~cm$

A seção adotada será uma boa solução, se uma das verificações for aproximadamente igual a seu valor admissível e as outras menores. No caso $h=10,\!281$ cm acarretará $f_{m\acute{a}x}\cong \overline{f}$ e $\sigma_{at}<\overline{\sigma}_f$ e $\tau_{at}<\overline{\tau}_f$.

Assim deve-se adotar a seção comercial de altura imediatamente superior a 10,281 cm. Adota-se, portanto, seção de 10 x 12 cm².

d) Ligações em peças estruturais de madeira

As ligações em peças de madeira podem ser por meio de dentes (entalhes), coladas, pregadas ou parafusadas.

d.1) Ligações por meio de dentes.

É uma ligação de peças comprimidas, construída conforme a figura 07.

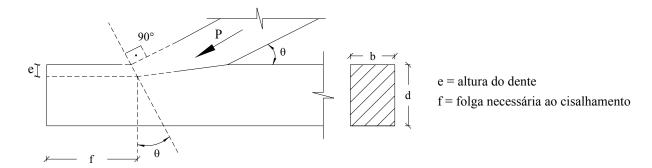


Figura 7 – Ligação por meio de dentes

Neste tipo de ligação devem ser dimensionadas: a altura do dente (e), para que não ocorra esmagamento por compressão na região do dente; e a folga (f) para que não ocorra ruptura por cisalhamento.

$$e \ge \frac{P \cdot \cos \theta}{b \cdot \overline{\sigma}_{\theta}} \qquad e \qquad f \ge \frac{P \cdot \cos \theta}{b \cdot \overline{\tau}_{\ell}}$$

onde:

$$\overline{\sigma}_{\theta} = \frac{\overline{\sigma}_{c} \cdot \overline{\sigma}_{n}}{\overline{\sigma}_{c} \cdot \sin^{2}\theta + \overline{\sigma}_{n} \cdot \cos^{2}\theta}$$

sendo:

e = altura do dente

P = carga atuante de compressão

 θ = ângulo entre as fibras das barras ligadas

b = largura da barra (largura do dente)

 σ_{θ} = tensão admissível de compressão inclinada de um ângulo θ

 σ_c = tensão admissível de compressão paralela às fibras

 σ_n = tensão admissível de compressão normal às fibras

 $\bar{\tau}_{\ell}$ = tensão admissível de cisalhamento nas ligações

A fim de não enfraquecer em demasia a peça que recebe a ligação (peça inferior da figura 07, construtivamente, se limita a altura do dente (e) em d/4.

 $e \le d / 4$, recomendação construtiva

Caso seja necessária uma altura do dente maior pode-se utilizar dois dentes, conforme figura 08, ou ainda cobrejuntas pregadas ou parafusadas para absorver o restante da carga.

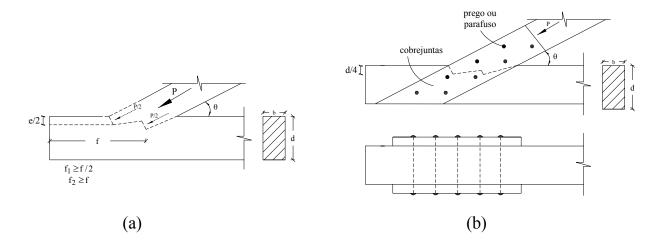


Figura 08 - Ligações por meio de dentes para cargas grandes

d.2) Ligações pregadas

Nas ligações pregadas deve-se obter o número comercial do prego, que define suas dimensões, e a quantidade de pregos existentes na ligação. A NB-11/1951, "Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira - Norma Brasileira", indica para cálculo da força admissível em um prego, cuja penetração é de 2/3 de seu comprimento, a seguinte expressão:

$$F = K \cdot \delta^{3/2}$$

onde:

F = força admissível, de um prego, em kgf

 $K = {4.5 \text{ para madeiras de peso específico } \rho 15 \le 0.65 \text{gf/cm}^3 \text{ e} \over 7.5 \text{ para madeiras de peso específico } \rho 15 \ge 0.65 \text{gf/cm}^3.}$

 δ = diâmetro do prego em mm

A tabela 2 apresenta os pregos comerciais, suas dimensões e força admissível em cada prego.

Para definir uma ligação pregada deve-se atender aos seguintes requisitos:

- a) a largura de cada cobrejunta é metade da largura da peça central, desta forma não é desnecessário verificar a cobrejunta, pois juntas tem a mesma seção da peça central;
- b) o diâmetro do prego deve ser de no máximo 1/6 da espessura da peça de ligação de menor espessura, a fim de evitar perfuração prévia, para que a peça não sofra rachaduras ao penetrar o prego.

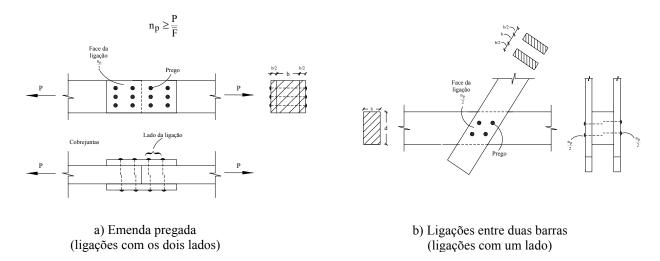


Figura 9 - Ligações pregadas típicas.

c) o comprimento do prego deve ser tal que garanta penetração mínima de 2/3 de seu comprimento na peça central.

Escolhido o número comercial do prego, pelos requisitos acima, calcula-se o número de pregos em cada lado da ligação (n_p) , com base na carga a ser absorvida (P) e na força admissível de cada prego (F) apresentada na tabela.

TABELA IV Força admissível de pregos comerciais

Número do Diâmetro Compi		Comprimento	Pregos por pacote de	Força admissível do Prego em kgf		
prego	mm	mm	1kg	$ \rho 15 \le 650 \text{kgf/m}^3 $	$ \rho 15 \ge 650 \text{kgf/m}^3 $	
17x21	3,0	48	305			
17x24	3,0	55	285	23,4	39,0	
17x27	3,0	62	226			
18x24	3,4	55	211			
18x27	3,4	62	187	28,2	47,0	
18x30	3,4	69	175			
19x27	3,9	62	152		57.9	
19x30	3,9	69	133	24.5		
19x33	3,9	76	122	34,5	57,8	
19x36	3,9	83	109			
20x30	4,4	69	99			
20x36	4,4	83	91	41,5	69,3	
20x42	4,4	96	76			
21x33	4,9	76	80			
21x36	4,9	83	70	48,8	81,4	
21x45	4,9	103	56			
22x42	5,4	96	51			
22x45	5,4	103	49	56,5	94,2	
22x48	5,4	110	45			
23x54	5,9	124	34	64,5	107,5	
24x60	6,4	138	27	87,7	146,0	
25x72	7,6	165	16	94,5	157,5	

d.3) Ligações parafusadas

As ligações parafusadas são utilizadas quando a ligação pregada fornece um número muito grande de pregos. Os parafusos devem ser passantes, com arruelas e porcas nas duas extremidades, pois são dimensionados como pinos. A seguir apresenta-se o roteiro para o cálculo de uma ligação parafusada.

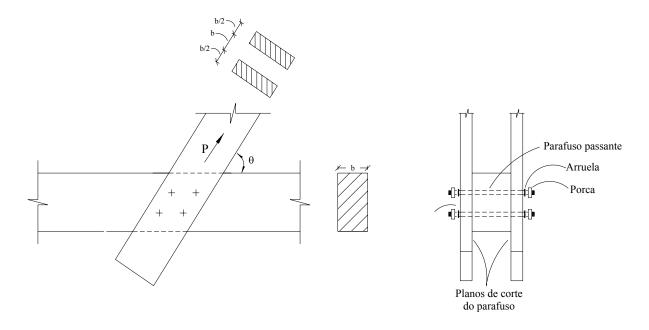


Figura 10 - Ligação parafusada típica

1º Passo) Conhecidas as dimensões das peças e o diâmetro do parafuso a ser utilizado, calculam-se inicialmente a força admissível do parafuso na direção paralela às fibras (F_p) e normal às fibras (F_n), dados pelos menores valores das seguintes expressões:

$$\begin{split} & \overline{F}_p = 0,\!877 \cdot b \cdot \delta \cdot \overline{\sigma}_c & \text{ou} & \overline{F}_p = 35 \cdot \sqrt{\overline{\sigma}_c} \cdot \delta^2 \\ & \overline{F}_n = 1,\!414 \cdot \eta \cdot b \cdot \overline{\sigma}_n \cdot \delta & \text{ou} & \overline{F}_n = 41 \cdot \eta \cdot \sqrt{\overline{\sigma}_n} \cdot \delta^2 \end{split}$$

Onde:

 $F_p \ = \ \frac{força \ admissível \ de \ um \ parafuso \ na \ direção \ paralela \ às \ fibras,}{em \ kgf;}$

 $F_n = { \begin{array}{c} {\rm força\ admiss\'ivel\ de\ um\ parafuso\ na\ direç\~ao\ normal\ as\ fibras,} \\ {\rm em\ kgf;} \end{array} }$

 σ_c = tensão admissível à compressão paralela às fibras, em kgf/cm²;

 $\overline{\sigma}_n$ = tensão admissível à compressão normal às fibras, em kgf/cm²;

b = largura da peça central da ligação, ou quando menor, soma das larguras das cobrejuntas, em cm;

 δ = diâmetro do parafuso, em cm;

 $\eta = {\text{coeficiente}}$ de distribuição, em função do diâmetro do

TABELA V Valores de η

Diâmetro	polegadas	1/4"	5/16"	3/8"	1/2"	3/4"	1"
δ	cm	0,64	0,80	0,95	1,27	1,91	2,54
	η	2,50	2,20	1,95	1,68	1,41	1,27

 2° Passo) Calcular a força admissível de um parafuso (F_{θ}) , na direção do esforço, inclinado de um ângulo θ , por:

$$\overline{F}_{\theta} = \frac{\overline{F}_{p} \cdot \overline{F}_{n}}{\overline{F}_{p} \cdot \text{sen}^{2}\theta + \overline{F}_{n} \cdot \text{cos}^{2}\theta}$$

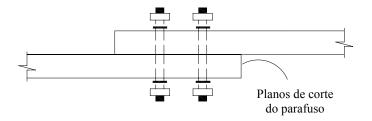
3º Passo) Calcular o número de parafusos (np), em cada lado da ligação por:

$$np \ge \frac{P}{\overline{F}_{\theta}}$$

4º Passo) Detalhar, ou desenhar, a ligação

Observações:

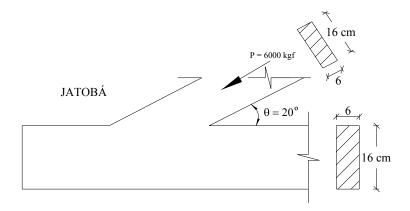
- a) o roteiro apresentado acima é válido para ligações simétricas, onde o parafuso é solicitado em dois planos de corte e as cobrejuntas são de madeira;
- b) em ligações assimétricas a força admissível de um parafuso é metade da calculada, pois o parafuso é submetido a um único plano de corte;



- c) quando as cobrejuntas são metálicas (de aço), a espessura das cobrejuntas pode ser de aproximadamente b/10, onde b é a largura da peça central, e a força admissível de cada parafuso majorada, conforme a direção por:
 - 1,25 . F_p na direção paralela às fibras;
 - 1,00. F_n na direção normal às fibras.

A título de esclarecimento, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação.

Exemplo: Dimensionar a ligação do nó de apoio de uma treliça de jatobá, sabendo-se que o ângulo entre as barras é de 20°, as seções das barras são de 6x16cm², e a carga de compressão aplicada pela barra inclinada é de 6 000 kgf.



Para que a ligação fosse unicamente por meio de dentes, seria necessária uma altura para o dente (e) de:

$$e \ge \frac{P \cdot \cos \theta}{b \cdot \overline{\sigma}_{\theta}}, \qquad \text{onde} \qquad \frac{\overline{\sigma}_{\theta}}{\overline{\sigma}_{c} \cdot \sin^{2} \theta + \overline{\sigma}_{n} \cdot \cos^{2} \theta}$$

$$\overline{\sigma}_c = 136.5 \text{ kgf/cm}^2$$
, $\overline{\sigma}_n = 40.8 \text{ kgf/cm}^2$ (tabela, p/o jatobá)

$$\theta = 20$$
o, $b = 6$ cm, $P = 6000$ kgf (enunciado)

$$\frac{-}{\sigma_{\theta}} = \frac{136.5 \cdot 40.8}{136.5 \cdot \text{sen}^2 20^\circ + 40.8 \cdot \cos^2 20^\circ} \approx 107 \,\text{kgf/cm}^2$$

$$e \ge \frac{6000 \cdot \cos 20^{\circ}}{6 \cdot 107} \cong 9 \text{ cm}$$

É recomendado, pela prática, a utilização de dentes de altura não superior a 1/4 da altura da peça.

No caso:

$$d/4=16/4=4$$
 cm

Assim pode-se utilizar dois dentes de 4 cm, e o restante da carga deve ser absorvido por cobrejuntas pregadas ou parafusadas. Neste caso os dentes absorverão uma parcela da carga, $P_{\rm d}$, obtida por:

$$e = \frac{P_d \cdot \cos \theta}{b \cdot \overline{\sigma}_{\theta}} \qquad \therefore \qquad P_d = \frac{e \cdot b \cdot \overline{\sigma}_{\theta}}{\cos \theta}$$

$$e = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$$

$$P_{\rm d} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 107}{\cos 20^{\rm o}} \approx 5465 \, \rm kgf$$

A folga necessária ao cisalhamento, f, e a carga transmitida pelas cobrejuntas ΔP , serão:

$$f \ge \frac{P_d \cdot \cos \theta}{b \cdot \overline{\tau}_{\ell}}$$
 : $\Delta P = P - P_d$

 $\bar{\tau}_{\ell}$ = 43,6 kgf/cm² (tabela, para o Jatobá)

$$f \ge \frac{5465 \cdot \cos 20^{\circ}}{6 \cdot 43.6} = 20 \text{ cm}$$

 $f_1 \ge f/2 = 10 \,\mathrm{cm} (\mathrm{para} \,\mathrm{o} \,\mathrm{primeiro} \,\mathrm{dente})$

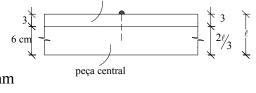
 $f_2 \ge f = 20 \, \text{cm} (\text{para o segundo dente})$

 $\Delta P = 6000 - 5465 = 535 \,\mathrm{kgf}$ (carga a ser transmitida pelas cobrejuntas)

- a) Caso as cobrejuntas, que transmitirão 535 kgf, sejam pregadas ter-se-á:
- Escolha das cobrejuntas

2 tábuas de largura b/2 = 3 cm, altura d = 16cm, evitando-se a verificação de sua resistência.

- Escolha dos pregos



$$\frac{1}{6}$$
 · menor espessura = $\frac{1}{6}$ · 3 cm = 0,5 cm = 5 mm

penetração $\geq \frac{2}{3} \ell = 6$ cm, então o prego deverá ter 9 cm = 90 mm

Prego adotado: nº 20 x 42, pois δ = 4,4 mm < 5 mm e ℓ = 96 mm > 90 mm.

- Quantidade de pregos em cada lado da ligação (np)

F = 69.3 kgf (tabela, para $\rho 15 = 0.96 \text{gf/cm}^3$, do Jatobá)

 $np \ge \frac{\Delta P}{F} = \frac{535}{69.3} = 8 \text{ pregos (em cada lado da ligação)}$

$$\frac{np}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
 pregos (em cada face, em cada lado da ligação)

b) Caso as cobrejuntas, sejam parafusadas, ter-se-á

 F_p e $F_n = 2$ planos de corte

cobrejuntas = $2 \text{ tábuas } 3 \text{ x } 16\text{cm}^2$

parafusos de diâmetro $\delta = 0.64$ cm (1/4"), foram adotados $\eta = 2.50$ (tabela)

$$\overline{\sigma}_c = 136,5 \text{ kgf/cm}^2$$
, $\overline{\sigma}_n = 40,8 \text{ kgf/cm}^2$ (tabela, para o Jatobá)

b = 6 cm (peça central) ou b = 3+3 = 6cm (soma das 2 cobrejuntas)

$$\overline{F}_p = 0.877 \cdot b \cdot \delta \cdot \overline{\sigma}_c \cong 459.6 \, kgf \quad ou \quad \overline{F}_p = 35 \cdot \sqrt{\overline{\sigma}_c} \cdot \delta^2 \cong 167.4 \, kgf$$

$$\overline{F}_p = 167.4 \text{ kgf (menor dos dois)}$$

$$\overline{F}_n = 1{,}414 \cdot \eta \cdot b \cdot \overline{\sigma}_n \cdot \delta \cong 554{,}8\,kgf \quad ou \quad \overline{F}_n = 41 \cdot \eta \cdot \sqrt{\overline{\sigma}_n} \cdot \delta^2 \cong 268{,}1\,kgf$$

$$\overline{F}_n = 268.1 \text{ kgf (menor dos dois)}$$

- cobrejuntas c/barra inclinada $\theta = 0^{\circ}$

$$F_{\theta} = F_{p} = 167,4 \text{ kgf}$$

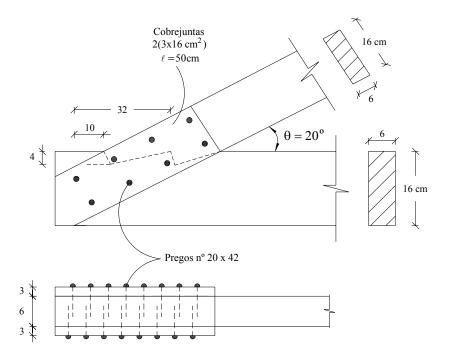
- cobrejuntas c/barra horizontal $\theta = 20^{\circ}$

$$\overline{F}_{\theta} = \frac{\overline{F}_{p} \cdot \overline{F}_{n}}{\overline{F}_{p} \cdot \sin^{2}\theta + \overline{F}_{n} \cdot \cos^{2}\theta} = 175 \,\text{kgf}$$

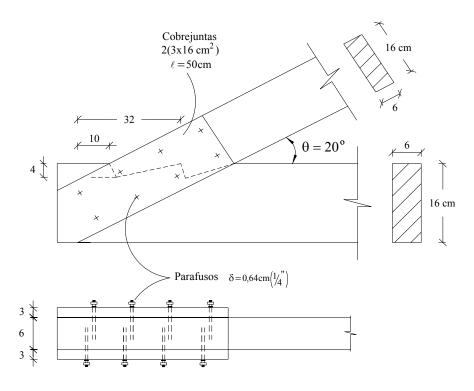
Como a ligação deve satisfazer os dois lados, adota-se: F = 167,4 kgf (menor dos dois)

$$np \ge \frac{\Delta P}{167.4} = \frac{535}{167.4} \approx 3.2$$
 : $np = 4$ parafusos

Finalmente detalha-se a ligação:



a) Se a ligação for pregada

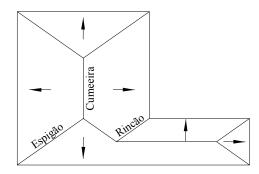


b) Se a ligação for parafusada

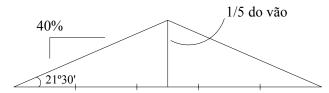
e) Estruturas de telhado

Os telhados são constituídos da cobertura e da estrutura de sustentação. As coberturas, em geral, podem ser de barra, tipo colonial ou francesa, cimento-amianto, alumínio, compensado, tipo madeirit, ou ferro galvanizado. As estruturas de sustentação do telhado normalmente são de madeira ou metálicas.

Os telhados são constituídos por uma ou mais superfícies que podem ser planas, curvas ou mistas. As superfícies planas são as mais comuns. Essas superfícies são denominadas "águas" e conforme o seu número, tem-se telhados de uma, duas, três, quatro ou mais águas. Abaixo se observa um telhado com seis águas.



As inclinações dos telhados são funções do tipo da telha, do comprimento do canal e da espessura de sobreposição das mesmas. As inclinações dos telhados podem ser expressas em ângulo, percentagem e ponto. Um telhado com ponto 1:5, tem a altura do pendural correspondente a um quinto do vão, uma inclinação que corresponde a 40% e possui um ângulo aproximado de 21° 30'.



A correspondência entre ponto, percentagem e ângulo, bem como as inclinações mínimas e máximas para cada tipo de cobertura, são apresentados a seguir.

TABELA VI Correspondência entre as inclinações do telhado em ângulo, ponto e percentagem.

Ângulo do telhado	Ponto de inclinação	Percentagem de inclinação
33° 30'	1:3	66
26° 30'	1:4	50
21° 30'	1:5	40
17° 30'	1:6	32
10°	1:11	18

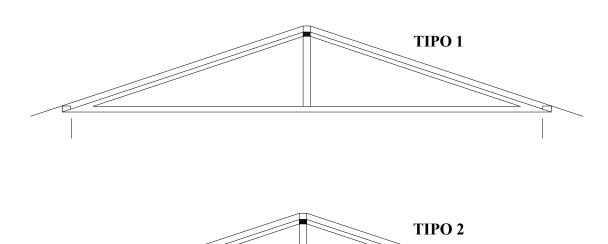
TABELA VII Inclinação mínima e máxima para as coberturas mais comuns

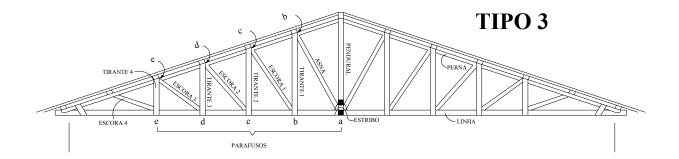
Tipos de telha	Inclinação mínima	Inclinação máxima
Telha Francesa	26°	60°
Telha Colonial	15°	45°
Chapas de ferro galvanizado	10°	90°
Chapas de filtro-cimento	10°	900
Chapas de alumínio	10°	900
Compensado	10°	900
Telhas tipo calha	3°	900

As telhas de barro apoiam-se sobre as ripas, e estas sobre caibros, e estes sobre as terças (trama). As terças apoiam-se sobre as tesouras de telhado, que encarregam-se de transmitir a carga permanente e acidental da cobertura sobre os pilares ou paredes.

As telhas leves, tipo cimento-aminato, apoiam-se no sentido do seu cumprimento sobre as terças, e estas sobre a tesoura de telhado. As ripas, os caibros e as terças são solicitados à flexão e são dimensionadas como vigas. As tesouras de telhados são sistemas estruturais (treliças) construídos de forma que todos os elementos sejam solicitados à compressão ou tração, com o objetivo de vencerem maiores vãos com menor gasto de material estrutural.

Nas figuras a seguir pode-se observar uma tesoura simples, **tipo 1**, uma tesoura normal, **tipo 2**, e uma tesoura mais complexa que pode vencer vãos de até 25 m, **tipo 3**. A nomenclatura das partes componentes da tesoura de telhado é também mostrada nesta última figura.





As tesouras de telhado podem ser dimensionadas por meio de cálculos estáticos ou por métodos gráficos. A seguir apresenta-se um esquema para cálculo de uma tesoura de telhado.

Considere um telhado com cobertura de cimento-amianto que tenha:

Vão da tesoura: 14,00 m
Distância entre tesouras: 4,00 m
Distância entre terças: 1,69 m
Inclinação do telhado: 15°

Cálculo das cargas sobre cada nó:

Considera-se a área de influência da cobertura sobre uma das terças: $4,00 \text{ m} \times 1,69 \text{ m} = 6,76 \text{ m}^2$

Peso da cobertura e acessório 21 kg/m²

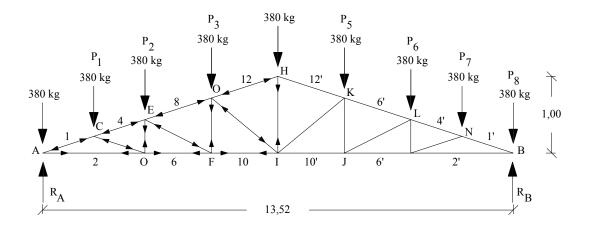
Peso próprio da terça (estimado) 17 kg/m²

Ação do vento 18 kg/m^2

 56 kg/m^2

Carga por nó = $6.76 \text{ m}^2 \text{ x } 56 \text{ kg/m}^2 = 378.6 \text{ kg} \approx 380 \text{ kg}$

Esquema da Estrutura e Cargas Atuantes:



Determinação dos Esforços

Por se tratar de cargas em posições simétricas, tem-se:

$$R_A = R_B = \frac{380 \cdot 8}{2} = 1520 \text{ kg}$$

A seguir a estrutura poderá ser resolvida empregando o método de Cremona, para a determinação dos esforços em cada uma das barras.

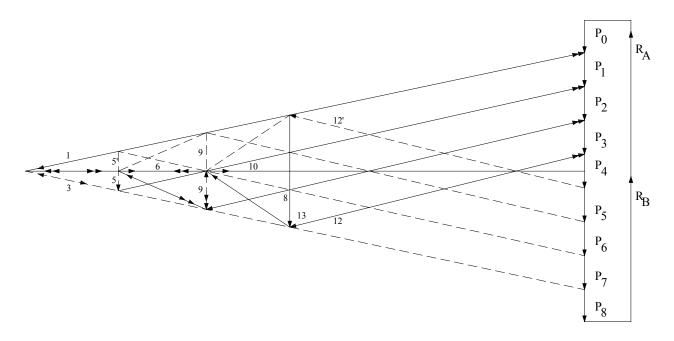


Diagrama de Forças (Cremona)

Quadro dos esforços nas barras.

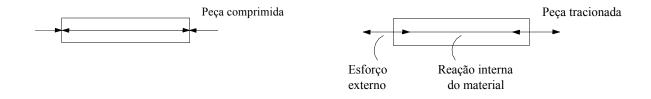
Barra	Esforço (kg)	Barra	Esforços (kg)
1	- 5.100	8	- 3.680
2	+ 4.900	9	+ 385
3	- 685	10	+ 3.550
4	- 4.440	11	- 930
5	+ 185	12	- 2.920
6	+ 4.270	13	+ 1.145
7	- 815		

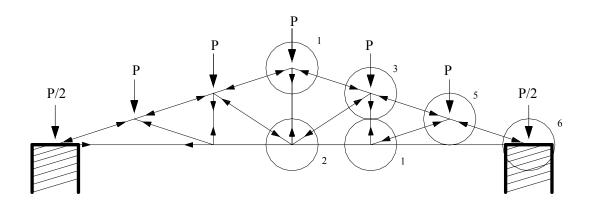
De acordo com os esforços de cada peça que concorre a um determinado nó, procede-se ao desenho e dimensionamento do mesmo.

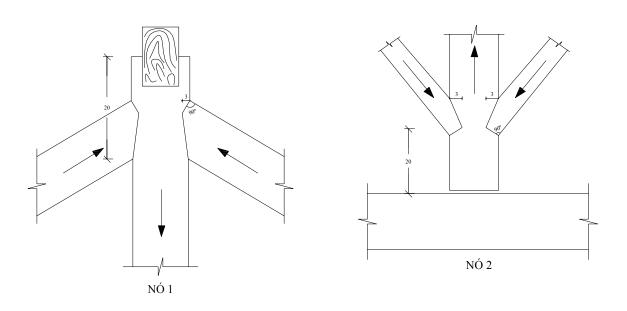
A título de exemplo, apresenta-se a seguir um esquema de uma tesoura de telhado tipo 3, convencional, e os detalhes dos respectivos nós para vãos até 15m, e três tabelas para dimensionamento de estrutura de madeira para telhado com cobertura de barro e com coberturas leves tipo cimento-amianto.

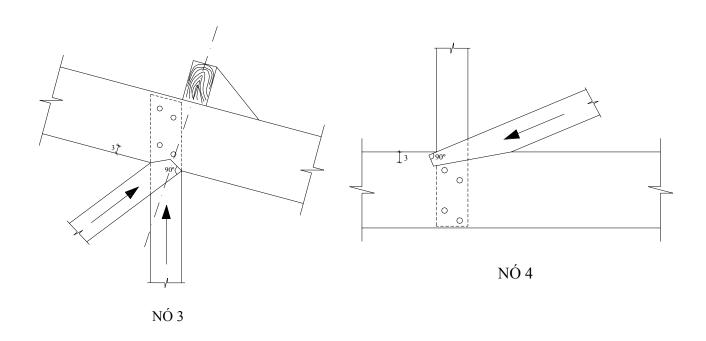
As tabelas deverão ser empregadas para telhado com inclinação igual ou superior ao ângulo especificado nas mesmas. A madeira a ser utilizada deverá ter características iguais ou superiores àquelas mencionadas nas tabelas.

Detalhes dos encaixes nos nós de tesouras de telhado convencional









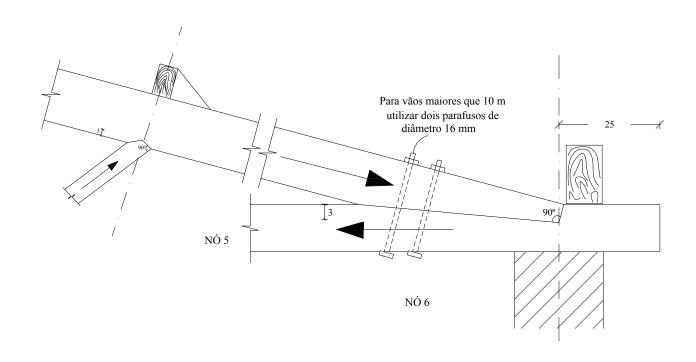
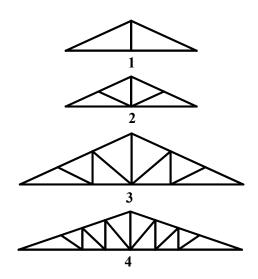


TABELA VIII
Engradamento para coberturas de barro



Inclinação do telhado ≥ 21,80

Distância entre tesouras $\leq 3.5 \text{ m}$

Distância entre caibros $\leq 0.5 \text{ m}$

 $Madeiras: \sigma_{adm.\;comp} \qquad \ \geq 70\;kg/cm^2$

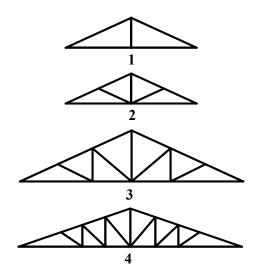
 $\sigma_{adm.\;tração} \qquad \geq 70\;kg/cm^2$

 $\tau_{\text{ adm. } /\!/} \qquad \qquad \geq 20 \text{ kg/cm}^2$

Vão até (m)	5	7	9	11	13	15
Tesoura tipo	2	2	2	3	3	4
Nº de terças + frechais + cumieira	5	5	5	7	7	9
Caibros	3,8x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5
Terças, frechais e cumieira	7,5x15	7,5x23	7,5x23	7,5x23	7,5x23	7,5x23
Perna	7,5x7,5	7,5x15	7,5x23	7,5x23	7,5x23	7,5x23
Asna	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x10	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x15
Escora 1	ı	-	-	7,5x7,5	7,5x11,5	7,5x11,5
Escora 2	•	-	-	-	-	7,5x7,5
Pendural	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x15	7,5x15
Tirante 1	ı	-	-	2,2x7,5	2,2x7,5	2,2x7,5
Tirante 2	-	-	-	-	-	2,2x7,5
Linha	7,5x11,5	7,5x15	7,5x15	7,5x18	7,5x23	7,5x23

Obs.: (a)A tabela é adaptada do livro "Tesouras de Telhado" de autoria de J. C. REGO MONTEIRO; (b)As seções das peças, em cm, estão dimensionadas considerando os enfraquecimentos nos encaixes.

TABELA IX
Engradamento para coberturas leves tipo cimento-amianto



Inclinação do telhado ≥ 15° ou 27% ou 1:7

Espaçamento entre tesouras \leq 4,00 m Beiral \leq 0,40 m Distância entre frechal e terça \leq 1,23 m

Distância entre terça e terça $\leq 1,63 \text{ m}$

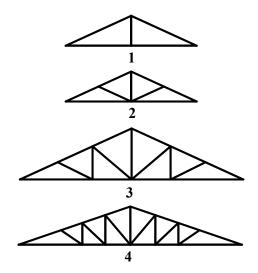
Madeira: $\sigma_{adm. comp}$ $\geq 70 \text{ kg/cm}^2$

$$\begin{split} \sigma_{\text{adm. tração}} & \qquad \qquad \geq 70 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{\text{adm.}} \text{ //} & \qquad \geq 20 \text{ kg/cm}^2 \end{split}$$

Vão até (m)	5	7	9	11	13	15
Tesoura tipo	1	2	2	3	4	4
Nº de terças + Frechais + cumieira	6	8	8	10	12	12
Terças, frechais e cumieira	7,5x15	7,5x15	7,5x15	7,5x15	7,5x15	7,5x15
Perna	7,5x7,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x15	7,5x15
Asna	5,0x6,0	3,8x7,5	7,5x7,5	5,0x7,0	7,5x7,5	7,5x7,5
Escora 1	-	5,0x7,0	5,0x7,0	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5
Escora 2	-	-	-	5,0x7,0	7,5x7,5	7,5x7,5
Escora 3	-	-	-	-	5,0x7,0	5,0x7,0
Pendural	7,5x10	7,5x10	7,5x10	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5
Tirante 1	-	1,2x5,0	1,2x5,0	2,5x7,5	2,5x7,5	2,5x7,5
Tirante 2	-	-	-	1,2x5,0	2,5x7,5	2,5x7,5
Tirante	-	-	-	-	1,2x5,0	1,2x5,0
Linha	7,5x7,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x15	7,5x23	7,5x23

Obs.: As seções das peças, em cm, estão dimensionadas considerando os enfraquecimentos nos encaixes.

TABELA X
Engradamento para coberturas leves tipo cimento-amianto



Inclinação do telhado $\geq 20^{\circ}$ ou 36% ou = 1:5

Espaçamento entre tesouras \leq 4,00 m Beiral \leq 0,40 m Distância entre frechal e terça \leq 1,23 m Distância entre terça e terça \leq 1,63 m

Madeira: $\sigma_{adm. comp}$ $\geq 70 \text{ kg/cm}^2$

$$\begin{split} \sigma_{\text{adm. tração}} & \qquad \qquad \geq 70 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{\text{adm.}} \text{ //} & \qquad \geq 20 \text{ kg/cm}^2 \end{split}$$

Vão até (m)	5	7	9	11	13	15
Tesoura tipo	1	2	2	3	4	4
N° de terças + frechais + cumieira	6	8	8	10	12	12
Terças, frechais cumieira	7,5x15	7,5x15	7,5x15	7,5x15	7,5x15	7,5x15
Perna	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5
Asna	3,8x7,5	3,8x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5	7,5x7,5
Escora 1	-	5,0x6,0	5,0x6,0	5,0x7,0	7,5x7,5	7,5x7,5
Escora 2	ı	-	-	5,0x6,0	5,0x7,0	5,0x7,0
Escora 3	•	-	-	•	5,0x6,0	5,0x6,0
Pendural	7,5x10	7,5x10	7,5x10	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5
Tirante 1	•	1,2x5,0	1,2x5,0	2,5x7,5	2,5x7,5	2,5x7,5
Tirante 2	-	-	-	1,2x5,0	2,5x7,5	2,5x7,5
Tirante	-	-		-	1,2x5,0	1,2x5,0
Linha	7,5x7,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x11,5	7,5x15	7,5x15

Obs.: As seções das peças, em cm, estão dimensionadas considerando os enfraquecimentos nos encaixes.

4.2 - Dimensionamento de peças estruturais de aço

Ao iniciar o dimensionamento de peças de aço, recomenda-se a utilização das unidades de forças em kgf e de comprimentos em cm. Isto evitará confusões com unidades, visto que as características do material são encontradas com estas unidades.

Dois tipos de aço são utilizados em estruturas, o carbono ou doce e os de baixa liga, este último de maior resistência e utilizado em estruturas especiais. Ambos têm um peso específico da ordem de 7,8 gf/cm³.

As características admissíveis destes aços são fornecidas na tabela a seguir:

TABELA XI
Características admissíveis de aços

		Aço carbono		Aço de baixa liga			
Elementos	Tração e compressão	Cisalhamento	Módulo de elasticidade	Tração e compressão	Cisalhamento	Módulo de elasticidade	
	$\overset{-}{\sigma}_{aço} \ ext{kgf/cm}^2$	τ aço kgf/cm²	E kgf/cm ²	$\frac{-}{\sigma}_{aço}$ kgf/cm ²	τ aço kgf/cm²	E kgf/cm ²	
Barras e chapas de fixação	1.400	1.050	2.100.000	2.050	1.540	2.100.000	
Solda elétrica	900 (tração)	700	-	1.300(tração)	1.000	-	
manual	1.000(comp)			1.440(comp)			
Rebites e parafusos	2.800*	1.050**	-	4.100*	1.540**	-	

^{*} Tensão admissível ao esmagamento do furo

a) Roteiro: Aço à compressão

- 1^{o} Passo) Obter o esforço normal máximo, $N_{\text{máx}},$ traçando se necessário, o diagrama de força normal (ver tabela)
- 2° Passo) Adotar uma seção para verificação e obter a área da seção transversal, S, e o raio de giração mínimo, i_{min} (ver tabela).
- 3º Passo) Identificar o comprimento de flambagem, ℓ_{FL} , e calcular o índice de esbeltez, λ , por:

$$\lambda = \frac{\ell_{FL}}{i_{min}}$$

Observação: O comprimento de flambagem, ℓ_{FL} , é função do esquema estático e para estruturas de aço é adotado conforme a seguir.

^{**} Tensão admissível ao cisalhamento do tronco

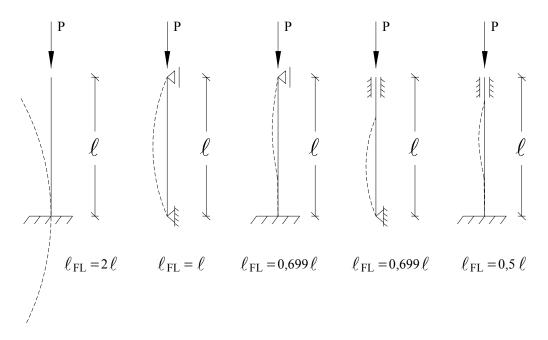


Figura 11 - Comprimento de flambagem (ℓ $_{\rm FL}$), adotados para o aço, conforme o esquema estático.

4º Passo) Obter a tensão admissível de flambagem, $\overset{-}{\sigma}_{FL}$, função do índice de esbeltez, $\lambda,$ e do tipo de aço.

a) Para aço carbono

a.1) Se
$$\lambda \leq 105$$

$$\overline{\sigma}_{FL} = 1.200 - 0.023 \cdot \lambda^2 \text{ kgf/cm}^2$$

a.2) Se
$$\lambda > 105$$

$$\overline{\sigma}_{FL} = \frac{10363000}{\lambda^2} \text{kgf/cm}^2$$

b) <u>Para aço de baixa liga</u>

b.1) Se
$$\lambda$$
 < 86

$$\sigma_{FL} = 1.750 - 0.0473 \cdot \lambda^2 \text{ kgf/cm}^2$$

b.2) Se
$$\lambda \ge 86$$

$$\overline{\sigma}_{FL} = \frac{10363000}{\lambda^2} kgf/cm^2$$

5º Passo) Calcular a tensão atuante máxima, σ_{at} , por:

$$\sigma at = \frac{N_{m\acute{a}x}}{S}$$

- 6º Passo) Comparar a tensão atuante máxima, σat, com a tensão admissível de flambagem, σfl, concluindo sobre a seção da peça.
- a) Se $\sigma_{at} > \overline{\sigma}_{FL}$, então a seção é insuficiente para resistir aos esforços. Neste caso deve-se aumentar a seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- b) Se σ_{at} for muito menor que σ_{FL} ($\sigma_{at} \ll \sigma_{FL}$) a seção, resiste aos esforços, entretanto é maior que o necessário tornando a solução anti-econômica. Neste caso deve-se diminuir a seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- c) Se σ_{at} for aproximadamente igual, entretanto menor que σ_{FL} ($\sigma_{at} < \sigma_{FL}$), então a seção adotada é uma boa solução para o problema.

Observação: No caso de peças de seção composta, recomenda-se a ligação entre seus elementos, a cada 40.i'_{mín}, onde:

 i'_{min} = 0 menor i_{min} dentre os dos elementos.

A título de esclarecimento, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação.

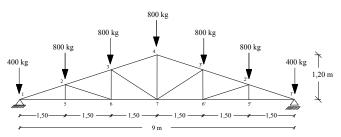
Exemplo: Sabendo-se que na barra 3 - 7 da treliça representada na figura a seguir, atua uma força de compressão de 1.700kgf, escolher a seção de aço carbono, composta por duas cantoneiras de abas iguais, necessária para resistir a este esforço.

$$1 - N_{max} = 1700 \text{ kgf}$$

2 - S e
$$i_{min} = ?$$

Adotando-se 2 cantoneiras de abas iguais identificadas por:

$$L 1\frac{1''}{4} \times 1\frac{1''}{4} \times \frac{3''}{16}$$
 (tabela)



Esquema estático da treliça

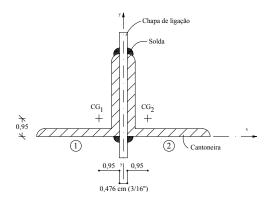
Pode-se calcular as características da seção composta por:

- Características dos elementos

Elemento 1 = Elemento 2

$$S_1 = S_2 = 2,78 \text{ cm}^2$$

 $J_{1x-x} = J_{2x-x} = 2,50 \text{ cm}^4$
 $J_{1y-y} = J_{2y-y} = 2,50 \text{ cm}^4$



Seção adotada para a barra 3 - 7

- Posição do centro de gravidade

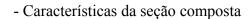
$$x_g = \frac{\sum xi \cdot Si}{\sum Si}$$
 : $x_1 = \frac{0,476}{2} + 0,95 = 1,188 \text{ cm}$

$$x_2 = -x_1 = -1,188$$
cm

$$x_g = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1,188 \cdot 2,78 + (-1,188) \cdot 2,78}{2,78 + 2,78} = 0 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{\sum y_i \cdot S_i}{\sum S_i}$$
 : $y_1 = y_2 = 0.95 \text{ cm}$

$$y_g = \frac{0.95 \cdot 2.78 + 0.95 \cdot 2.78}{2.78 + 2.78} = 0.95 \text{ cm}$$



$$S = \sum Si = S_1 + S_2 = 2 \cdot 2,78 = 5,56cm$$

$$\boldsymbol{J}_{x-x} = \sum \boldsymbol{J}_{ix-x} + \sum (\Delta y_i^{\,2} \, . \, \boldsymbol{S}_i) = \boldsymbol{J}_{1x-x} + \boldsymbol{J}_{2x-x} + (\Delta y_1^{\,2} . \boldsymbol{S}_1 + \Delta y_2^{\,2} . \boldsymbol{S}_2) \therefore \Delta \Delta$$

$$J_{x-x} = 2.50 + 2.50 + 0 + 0 = 5.00 \text{ cm}^4$$

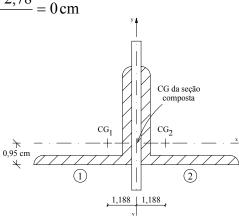
$$J_{y-y} = \sum J_{iy-y} + \sum (\Delta x_i^2 \cdot S_i) = J_{1y-y} + J_{2y-y} + (\Delta x_1^2 \cdot S_1 + \Delta x_2^2 \cdot S_2) \therefore \Delta \Delta$$

$$J_{v-v} = 2.50 + 2.50 + (1.188^2 \times 2.78) + (1.88^2 \times 2.78) = 12.847 \text{ cm}^4$$

$$i_{x-x} = \sqrt{\frac{J_{x-x}}{S}} = \sqrt{\frac{5,00}{5,56}} = 0,948 \text{ cm}$$

$$i_{y-y} = \sqrt{\frac{J_{y-y}}{S}} = \sqrt{\frac{12,847}{5,56}} = 1,520 \text{ cm}$$

 i_{min} = menor entre i_{x-x} e i_{y-y} , desde que a seção tenha ao menos um eixo de simetria, então i_{min} = i_{x-x} = 0,948 cm



$$3 - \ell_{FL} e \lambda = ?$$

A barra 3-7 é bi-articulada aos nós 3 e 7 da treliça e, portanto, o comprimento de flambagem é o comprimento da barra (ver figura). Pela geometria da treliça, obtem-se o comprimento da barra, como segue:

$$\frac{1,20}{4,50} = \frac{x}{3,00} = x = 0.8 \,\text{m}$$

$$\ell^2 = x^2 + 150^2 = \ell = 170 \,\text{cm}$$

$$\lambda = \frac{\ell_{FL}}{i_{min}} = \frac{170}{0,948} = 179,32$$

$$4 - \overline{\sigma}_{FL} = ?$$

Para o aço carbono, $\lambda = 179.32 > 105$

$$\sigma_{\rm FL} = \frac{10363000}{\lambda^2} = \frac{10363000}{179.32^2} = 322,27 \,\text{kgf/cm}^2$$

$$5 - \sigma_{at} = ?$$

$$\sigma_{at} = \frac{N_{max}}{S} = \frac{1700}{5,56} = 305,76 \,\text{kgf}/\text{cm}^2$$

6 - Verificação

$$\sigma_{at} = 305,76 \text{ kgf/cm}^2 < \overline{\sigma}_{FL} = 322,27 \text{ kgf/cm}^2$$
 ok!

Recomenda-se um espaçamento de 40 i'min entre elementos de ligação.

$$i'_{min} = i_{min}$$
 do elemento = 0,61cm (tabela)

40.
$$i'_{min} = 40 \text{ x.} 0,61 = 24,4\text{cm}$$

Pode-se adotar para a barra 3-7 da treliça em questão uma seção composta por duas cantoneiras

$$L 1 \frac{1''}{4} \times 1 \frac{1''}{4} \times \frac{3''}{16}$$
 (tabela)

ligadas entre si a cada 24cm, por pequenas chapas de ligação de 2" x 1" x 3/16", soldadas às cantoneiras.

b) Roteiro: Aço à tração

 $1^{\rm o}$ Passo) Obter o esforço normal máximo, $N_{\text{máx}},$ traçando, se necessário, o diagrama de força normal (ver tabela).

2º Passo) Adotar uma seção para verificação e obter a área da seção transversal, S (ver tabela)

 $3^{\rm o}$ Passo) Obter a área útil, $S_{\rm u}$, ou seja a área da seção transversal que efetivamente absorve o esforço.

- a) No caso de ligações soldadas, a área não é enfraquecida. Assim, a área útil é igual a área da seção transversal: SU = S
- b) No caso de ligações parafusadas ou rebitadas, a área da seção é enfraquecida pelos furos ou diminuída pela existência de rosca.
 - b.1) Existência de furos para parafusos ou rebites
 - Quando conhecida a ligação

$$S_{furos} = 2 \cdot \phi \cdot \delta$$

$$S_u = S - S_{furos}$$

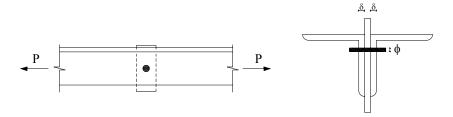


Figura 12 - Área dos furos

- Quando a ligação é desconhecida

Neste caso reserva-se parcela da área para a ligação, adotando-se:

$$S_u = 0.8 \cdot S$$

b.2) Existência de rosca (ferros redondos)

Neste caso a área é diminuída pela rosca, é usual adotar-se:

$$S_{11} = 0.8 \cdot S$$

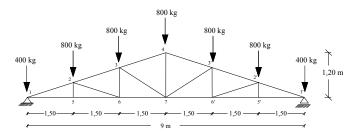
4º Passo) Calcular a tensão atuante máxima, σ_{at}, por:

$$\sigma_{at} = \frac{N_{m\acute{a}x}}{Su}$$

- 5º Passo) Comparar a tensão atuante, σ_{at} , com a tensão admissível do aço, $\sigma_{aço}$ (ver tabela), concluindo sobre a seção da peça.
- a) Se $\sigma_{at} > \overline{\sigma}_{a\varsigma o}$, a seção é insuficiente para resistir aos esforços. Neste caso devese aumentar a seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- b) Se σ_{at} for muito menor que $\sigma_{aço}$ ($\sigma_{at} \ll \sigma_{aço}$), a seção resiste aos esforços, entretanto é maior que o necessário tornando a solução anti-econômica. Neste caso deve-se diminuir a seção e refazer o problema a partir do segundo passo.
- c) Se σ_{at} for aproximadamente igual, entretanto menor, que $\sigma_{aço}$ ($\sigma_{at} < \sigma_{aço}$), então a seção adotada é uma boa solução para o problema.

A título de esclarecimento, apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação.

Exemplo: Sabendo-se que na barra 3-6 da treliça representada na figura a seguir, atua uma força de tração de 400 kgf, escolher a seção de aço carbono, composta por duas cantoneiras de abas iguais, necessária para resistir a este esforço.



$$1 - N_{\text{máx}} = 400 \text{ kgf}$$

$$2 - S = ?$$

Adotando-se para a seção duas cantoneiras L 1" x 1" x 1/8" (ver tabela) obtém-se:

$$S = 2 \cdot 1.48 = 2.96 \text{ cm}^2$$

$$3 - Su = ?$$

Admitindo-se que as ligações sejam rebitadas, embora desconhecidas, tem-se:

$$Su = 0.8 \cdot S = 0.8 \cdot 2.96 = 2.368 \text{cm}^2$$

4 -
$$\sigma_{at} = ?$$

$$\sigma_{at} = \frac{N_{max}}{Su} = \frac{400}{2,368} \approx 169 \,\text{kgf}/\text{cm}^2$$

5 - Verificação

$$\sigma_{at} = 169 \text{kgf/cm}^2 << \overline{\sigma}_{aco} = 1400 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (tabela)}$$

A seção adotada é maior que o necessário, entretanto já é a menor seção composta por duas cantoneiras de abas iguais. Caso o desenho estrutural permita, já com bastante folga, poderá ser empregada apenas uma barra.

c) Aço à flexão estática

y do eixo neutro;

Convenciona-se chamar de viga a uma peça estrutural que esteja submetida principalmente a esforços de flexão.

Nas construções metálicas, quando para um dado momento atuante, se consegue uma seção resistente empregando um perfil laminado isolado, isto é, sem haver necessidade vários perfis para formar um todo resistente, diz-se que é uma viga de perfil simples.

O perfil escolhido deve, no entanto, satisfazer a duas outras condições:

- 1°) A área da alma deve ser suficiente para poder resistir aos esforços cortantes.
- 2°) Para um dado vão, a seção transversal deve ter um momento de inércia tal que mantenha a flexão da viga dentro dos limites impostos pelas normas, o que representa a rigidez da viga.

Vigas de perfis simples são principalmente usadas para suportar pavimentos de edifícios e estrados de pontes. Nos edifícios, as vigas que recebem cargas de vigas secundárias, que transmitem as cargas das lajes às vigas principais, são chamadas longarinas ou transversinas, conforme seus eixos sejam paralelos à dimensão longitudinal ou transversal da planta. Nas pontes, as vigas secundárias quase sempre são longarinas e as vigas que transmitem as cargas destas às vigas principais chamam-se transversinas.

O dimensionamento das vigas de perfis simples é feito por meio da conhecida fórmula de flexão simples.

$$\overline{\sigma}_{f} = \frac{M \cdot Y}{J}$$

Onde: $\sigma f = \acute{e}$ a tensão na fibra à distância Y do eixo neutro;

 $Y = \acute{e}$ a distância do eixo neutro a qualquer fibra, e quando se toma Y = C, esta será a distância à fibra extrema da seção transversal, e a tensão nesta fibra será a tensão máxima na seção considerada;

J = é o momento de inércia da seção transversal efetiva.

A teoria em que se baseia a fórmula acima é condicionada à hipótese de que as seções que são planas antes da flexão, assim permaneçam após a atuação do momento e que as deformações são proporcionais às tensões. Isto significa que as solicitações devem ficar abaixo do limite elástico.

Para a verificação do cisalhamento são empregadas as fórmulas:

$$\bar{\tau}_{\ell} = \frac{Q \cdot Ms}{j \cdot t}$$
 e $\bar{\tau}_{t} = \frac{Q}{t \cdot h}$ onde:

 τ_ℓ = tensão de cisalhamento longitudinal da alma da viga à distância

 $\bar{\tau}_t$ = tensão de cisalhamento transversal;

Q = força cortante vertical total na seção transversal considerada;

Ms = momento estático em relação ao eixo neutro, da área da seção transversal situada acima do eixo neutro;

h = altura da viga;

t = espessura da chapa da alma, na seção considerada;

J = momento de inércia da seção transversal efetiva (área bruta, no caso de cisalhamento).

A escolha de uma determinada bitola de viga é feita por meio do chamado momento resistente ou seja o módulo de resistência da seção. Reescrevendo a equação de flexão na forma:

$$\frac{M}{G} = \frac{J}{Y} = W$$

o símbolo W representa o módulo de resistência da seção, definido como o momento de inércia dividido pela distância à fibra extrema.

O caminho a seguir quando se emprega o módulo de resistência para o dimensionamento é o seguinte:

- 1º) Divide-se o momento fletor pela tensão admissível, para obter o valor do módulo de resistência necessário.
- 2°) Em tabela de propriedades de perfis estruturais, escolhe-se uma bitola de viga laminada que forneça o módulo requerido, com o mínimo de peso.

Exemplo: Obter uma seção de viga laminada para suportar uma carga de 1500 kg/m, para um vão de 9,15m. Tensão admissível do aço: 1400 kg/cm² (admitindo contenção lateral suficiente para controlar a flambagem da mesa comprimida).

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{8} \cdot 1500 \cdot 9,15^2 = 15698 \text{ kg.m}$$

Módulo de resistência necessário:

$$W = \frac{1569800 \text{ kg.cm}}{1400 \text{ kg/cm}^2} = 1121 \text{ cm}^3$$

Indo, por exemplo, a uma tabela específica adota-se uma viga duplo T de aba larga de 71,4 kg/m que fornece um módulo de resistência de 1.161 cm³.

Caso se quisesse executar um furo de 1", por exemplo, em uma das abas, seria necessário descontar este furo no cálculo do momento de inércia. A prática americana adota o critério de descontar um furo em cada mesa, mesmo que se trate de uma mesa só furada, o que não obriga ao cálculo com a linha neutra deslocada, o que daria praticamente a mesma resistência final, comprovada por testes feitos.

Furos na alma da viga deverão também ser deduzidos, proporcionalmente às suas respectivas distâncias à linha neutra.

A imposição de um limite para a flecha máxima de vigas se justifica pela necessidade de evitar que apareçam trincas nos pisos, forros e paredes. A prática americana limita esta flecha em 1/360 do vão e as normas brasileiras em 1/350. Vigas de diferentes seções que estejam suportando um mesmo pano de parede devem fletir por igual e, portanto, devem ser calculadas para produzir a mesma flecha.

Exemplo: Seja calcular uma viga para o caso do exemplo anterior, mantendo a flecha limitada a 1/360 do vão.

$$f = \left(\frac{1}{360}\right) \cdot 915 = 2,54 \text{ cm}$$

A flecha de uma viga simplesmente apoiada, com carga uniforme, é dada por:

$$f_{\text{máx}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q.L^4}{E \cdot J}$$

Fazendo $f = f_{max}$, tem-se:

$$2,54 = \frac{5 \cdot 15 \cdot 915^4}{384 \cdot 21000001} =$$
 J = 25670 cm⁴

Com este valor, entra-se em tabela específica e determina-se o perfil que seja mais econômico, com base em seu peso por unidade de comprimento.

Flambagem lateral, da mesa e da alma das vigas.

As taxas de trabalho usuais de vigas são idênticas para a tração e compressão, entendendo-se que tais taxas de trabalho pressupõem a sujeição da mesa de compressão da viga contra a flambagem lateral pois, caso contrário, a viga se romperia nas proximidades do seu limite elástico, devido a flecha lateral da mesa comprimida. Donde se conclui que a mesa comprimida se comporta como uma coluna, admitindo o emprego de fórmulas que reduzem a taxa de trabalho admissível em função do efeito de flambagem. É recomendável que se faça a verificação da flambagem da mesa comprimida, desde que a distância entre pontos de apoio lateral seja maior que 40 vezes o raio de giração da seção transversal.

Há também a possibilidade da ocorrência da flambagem diagonal da alma. Porém, nos perfis laminados comuns, é de pouca importância, o que só deve ser verificado com cuidado na alma das vigas de perfis compostos. O mesmo se pode dizer da flambagem segundo um eixo vertical da alma.

Vigas flexo-comprimidas ou flexo-tracionadas.

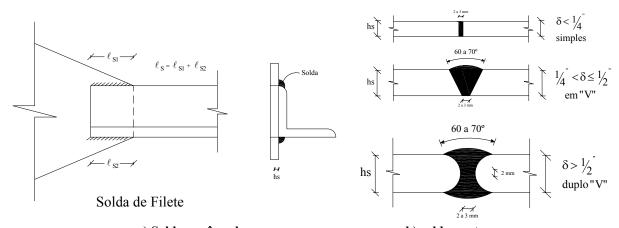
À semelhança do que foi visto para estruturas de madeira, deve-se adicionar à tensão de flexão a tensão de tração ou tensão de compressão, para considerar o efeito conjunto da solicitação de flexão com compressão ou tração, conforme for o caso.

d) Ligações em peças estruturais de aço

As ligações em peças estruturais de aço podem ser soldadas, parafusadas ou rebitadas.

d.1) Ligações soldadas

As ligações soldadas podem ser em ângulo ou em topo, conforme figura a seguir.



a) Solda em ângulo b) solda em topo Figura 13 - Tipos de ligações soldadas.

O cálculo de ligações soldadas consiste em obter a altura da solda, hs (em geral adotada como a espessura da barra) e o comprimento total da solda, ls.

Adotando-se hs, como a espessura da barra, pode-se calcular o comprimento total da solda por:

- para solda em ângulo

$$\ell_s \ge \frac{N_{m\acute{a}x}}{0.7 \cdot \tau_s \cdot hs}$$

de aço de baixa liga.

onde:

N_{máx} = força a ser absorvida pela ligação

 $\bar{\tau}_{\rm S} = 700 \text{ kgf/cm}^2$, no caso de aço carbono, e 1000 kgf/cm², no caso

- Para solda em topo

$$\ell_{s} \ge \frac{N_{m\acute{a}x}}{\tau_{s}(+) \cdot hs}$$
, para esforços de tração

$$\ell_s \ge \frac{N_{m\acute{a}x}}{\overline{\tau}_s(-) \cdot hs}$$
, para esforços de compressão

onde: N_{max} = força a ser absorvida pela ligação;

 τ_s (+) = 900kgf/cm², no caso de aço carbono, e 1.300kgf/cm², no caso de aço de baixa liga;

 $\bar{\tau}_{s}$ (-) = 1.000kgf/cm², no caso de aço carbono, e 1.440kgf/cm², no caso de aço de baixa liga.

d.2) Ligações parafusadas ou rebitadas

No caso de ligações parafusadas ou rebitadas, deve-se obter o número de parafusos ou rebites necessários em cada lado da ligação.

A força admissível, F, em cada parafuso ou rebite pode ser obtida por:

- No caso de corte simples (um plano de corte), usar o menor dos seguintes valores:

$$\overline{F} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \overline{\tau} \quad \text{ou} \quad \overline{F} = d \cdot \delta_{min} \cdot \overline{\sigma}_{esm}$$

- No caso de corte duplo (dois planos de corte)

$$\overline{F} = \frac{\pi d^2}{2} \cdot \overline{\tau}$$
 ou $\overline{F} = d \cdot \delta_{\min} \cdot \overline{\sigma}_{esm}$

onde: \overline{F} = força admissível no parafuso, ou rebite, em kgf;

d = diâmetro do parafuso, em cm;

 δ_{min} = menor espessura das peças de ligação, no caso de corte simples, ou o menor valor entre a espessura da peça central e a soma das cobrrejuntas, no caso de corte duplo, em cm;

 δ = tensão admissível ao cisalhamento do tronco (ver tabela);

 $\sigma_{\rm esm}$ = tensão admissível ao esmagamento do furo (ver tabela).

Em seguida pode-se obter o número de parafusos, ou rebites, np, por:

$$np \geq \frac{N_{\mbox{\footnotesize m\'ax}}}{\overline{F}}$$

onde: N_{max} = força a ser absorvida pela ligação.

As ligações parafusadas podem ser utilizadas para absorver forças axiais ao parafuso. Neste caso, a força admissível do parafuso, será o menor dos seguintes valores:

$$\overline{F} = \frac{0.8 \cdot \pi \cdot d^2}{4} \cdot \overline{\sigma}_{aco}$$
 ou $\overline{F} = \frac{\pi \cdot d \cdot hp}{2} \cdot \overline{\tau}_{aco}$

onde: d = diâmetro do parafuso, em cm;

hp = altura da porca, em cm;

 $\sigma_{aço}$ = tensão admissível do aço (ver tabela), em kgf/cm²;

 \overline{F} = força admissível de um parafuso, em kgf.

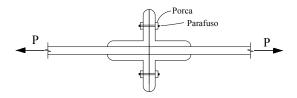
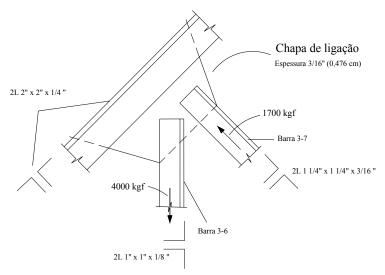


Figura 14 - Ligação parafusada com força axial

Exemplo: Dimensionar a ligação do nó 3, da treliça dos exemplos 1 e 2, deste item, sabendo-se que a barra do banzo superior desta treliça é composta por duas cantoneiras de abas iguais L 2"x2"x1/4" e a chapa de nó tem espessura de 3/16" (0,476 cm). Utilizar aço carbono.



a) No caso de ligação soldada

- Ligação da barra 3-7 na chapa de ligação

$$hs = \delta = 3/16" = 0,476 \text{ cm}$$

$$\ell_{s} \geq \frac{N_{m\acute{a}x}}{0.7 \cdot \overset{-}{\tau_{s}} \cdot hs}$$
 , solda em ângulo

$$\ell_{s} \ge \frac{1700}{0.7 \cdot 700 \cdot 0.476} = 7.3 \,\text{cm} \quad \text{adota - se } \ell_{s} = 8 \,\text{cm}$$

- Ligação da barra 3 - 6 na chapa de ligação

$$hs = \delta = \frac{1''}{8} = 0.317 \text{ cm}$$

$$\ell_s \ge \frac{N_{m\acute{a}x}}{0.7 \cdot \overline{\tau}_s \cdot hs}$$
, solda em ângulo

$$\ell_{s} \ge \frac{400}{0.7 \cdot 700 \cdot 0.317} = 2.6 \,\text{cm}$$
 adota – se $\ell_{s} = 3 \,\text{cm}$

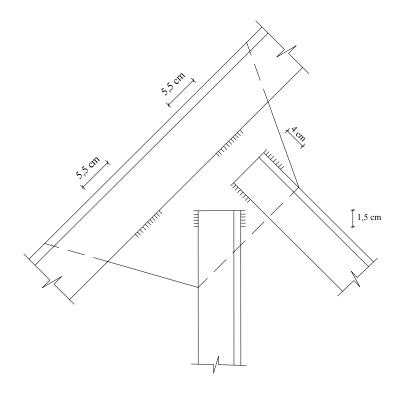
- Ligações da chapa de ligação ao banzo superior

O correto seria obter a resultante das forças aplicadas pelas barras 3 - 6 e 3 - 7 e obter o comprimento da solda. Na prática, simplesmente, somam-se os comprimentos de solda e aplica-se nesta ligação.

$$\ell_{\rm s} = 8 + 3 = 11 \, \rm cm$$

$$h_s = \delta = 1/4" = 0,635 \text{ cm}$$

Assim a ligação ficará:



b) No caso de ligação rebitada ou parafusada

Adotando-se rebites de diâmetro igual a 1/4" (0,635 cm) obtem-se:

- Ligação da barra 3-7 na chapa de ligação. No caso o rebite é solicitado a corte duplo

$$\overline{F} = \frac{\pi d^2}{2} \cdot \overline{\tau} = \frac{\pi \cdot 0.635^2}{2} \cdot 1050 = 665 \,\text{kgf}$$
, ou

$$\overline{F} = d \cdot \delta_{min} \cdot \overline{\sigma}_{esm} = 0,635 \cdot 0,476 \cdot 2800 = 846 \, kgf$$

$$\left(\delta_{\min} = 3/16" < 2 \times 3/16"\right)$$

Utiliza-se portanto $\overline{F} = 665 \text{ kgf}$, obtendo-se o número de rebites:

$$np \ge \frac{N_{m\acute{a}x}}{\overline{F}} = \frac{1700}{665} \cong 2,6 \Longrightarrow adota - se 3 rebites de 1/4".$$

- Ligação da barra 3-6 na chapa de ligação - corte duplo

$$\overline{F} = \frac{\pi d^2}{2} \cdot \overline{\tau} = 665 \, kgf \; , \; ou \;$$

$$\overline{F} = d \cdot \delta_{min} \cdot \overline{\sigma}_{esm} = 846 \, kgf$$

$$\left(\delta_{\min} = 3/16" < 2 \,\mathrm{x} \,1/8"\right)$$

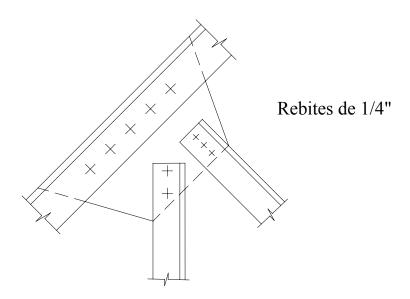
Utiliza-se portanto $\overline{F} = 665 \text{ kgf}$,

$$np \ge \frac{N_{\text{máx}}}{\overline{F}} = \frac{400}{665} \cong 0,6 \Rightarrow \text{adota} - \text{se 2 rebites de } 1/4".$$

As normas brasileiras recomendam utilizar no mínimo dois parafusos ou rebites, pois um defeito de fabricação no parafuso ou rebite, comprometerá toda a estrutura.

- Ligação da chapa de ligação ao banzo superior

De forma análoga ao item a, adotam-se 5 rebites de 1/4", e a ligação ficará:



Observação: As dimensões da chapa de ligação devem ser tais que permitam a colocação dos rebites ou parafusos.

4.3 - DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

1 – Cálculo de concreto armado no estado-limite último

1.1 - Generalidades

O novo conceito de cálculo consiste em estabelecer como segurança de uma seção sujeita a um momento M, também chamado de momento característico M_k , a de que a seção atingirá o seu estado-limite de segurança (ruptura) quando atuar um momento igual a M_k multiplicando por um coeficiente γ_f , chamado de coeficiente de segurança. O momento corresponde a este estado-limite da seção é chamado de momento último, momento de ruptura ou simplesmente momento de cálculo, designado por M_d .

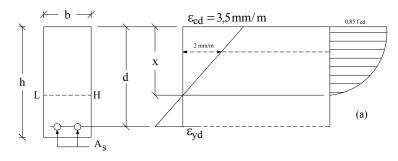
$$M_d = \gamma_f M_k$$
.

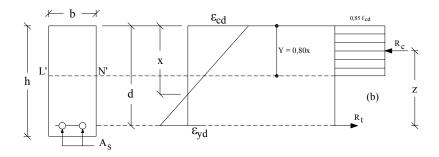
O fator de segurança γ_f , também chamado fator de majoração das cargas é igual a 1,4 pela nova norma brasileira.

Multiplicando o momento atuante pelo coeficiente de segurança γ_f , isto é, obtido o momento de cálculo M_d , o problema do dimensionamento consiste em fazer com que as dimensões da seção sejam tais que o colapso se realize para o momento M_d .

O problema tem que ser resolvido dentro das hipóteses fixadas para o estádio III, quais sejam:

- a) as seções transversais se conservam planas até a ruptura;
- b) o encurtamento de ruptura do concreto à compressão é de 3,5 mm/m na flexão simples;
- c) o alongamento máximo permitido ao longo da armadura de tração é de 10 mm/m a fim de evitar deformação plástica excessiva.
- d) a distribuição das tensões do concreto na seção se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo da Figura (a);





Permite-se substituir o diagrama parábola-retângulo por outro retangular com altura 0,8 vezes a distância da linha neutra (Figura (b)).

Para levar em conta o chamado efeito de rusch, definido como a tendência que a resistência do concreto tem de se reduzir sob a ação da carga permanente, a tensão máxima na fibra mais comprimida é multiplicada por 0,85 no caso das seções retangulares e naqueles em que a largura da zona comprimida decresce à medida que se aproxima da linha neutra.

Nas seções em que a largura cresce à medida que se aproxima da linha neutra (seções triangulares ou circulares, por exemplo) o coeficiente 0,85 da figura 3.4 é substituído por 0,80.

As tensões a adotar no estado-limite último são as de ruptura, chamadas tensões características, divididas por um coeficiente de minoração.

Para o concreto, a tensão no estado-limite (tensão de cálculo) é dada pela fórmula:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

Onde: f_{ck} (tensão característica) é a tensão mínima de ruptura obtida nos ensaios e para γ_c adota-se 1,4.

O coeficiente de minoração, γ_c , tem por objetivo corrigir o fato de que as tensões de ruptura dos concretos (f_{ck}), nas construções, podem ter valores inferiores aos dos corpos de prova ensaiadas em laboratório, em cujos resultados se baseiam a dosagem do concreto.

e) a tensão na armadura é tirada do diagrama tensão-deformação do aço empregado.

Se for atingido o ponto de escoamento da armadura, a tensão de cálculo será

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_s}$$

As tensões de escoamento obtidas nos ensaios são, assim, divididas por um coeficiente de minoração γ_s =1,15 para prever possível deterioração das propriedades do aço com o tempo e pequenos erros de posição das armaduras na obra.

1.2 - Propriedades dos aços

Os aços com patamar de escoamento são designados por CA-40A, CA-50A, CA-60A, onde o número representa o limite de escoamento em kg/mm² e a letra A significa a existência de patamar de escoamento.

Para os aços sem patamar de escoamento, define-se como escoamento convencional o ponto do diagrama tensão-deformação para o qual, se a carga for retirada, o diagrama segue uma linha reta, paralela ao diagrama de carregamento, deixando uma deformação residual de 2 mm/m.

Os aços encruados, sem patamar de escoamento, são designados por CA-40B, CA-50B, CA-60B, onde a letra B significa a não existência de patamar de escoamento.

Para os aços com escoamento acima de 4.000kg/cm² (CA-50 ou CA-60), tenham ou não patamar de escoamento, é exigida a existência de mossas ou saliências a fim de melhorar sua aderência.

O limite de escoamento real ou convencional é designado por Fy.

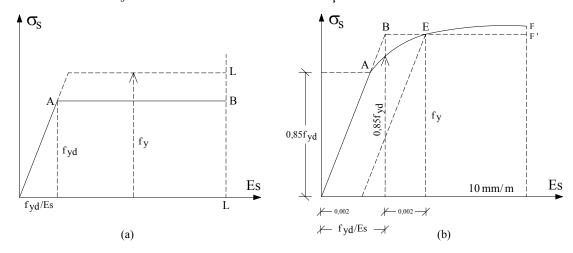
Para o aço com patamar de escoamento (categoria A), o diagrama tem o aspecto indicado na figura (a) limitado pela linha LL correspondente ao alongamento de 10mm/m.

A tensão de escoamento e o alongamento de cálculo do aço com patamar são:

$$f_{yd} = \frac{f_y}{1,15}$$

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Onde: E_s é o módulo de elasticidade do aço.



Para o aço sem patamar de escoamento, o diagrama tem o aspecto indicado na figura (b), podendo ser usado o diagrama obtido nos ensaios, deslocando paralelamente à reta AO, de tal forma que as ordenadas segundo esta paralela fiquem divididas por γ_s .

Assim, no ponto E de escoamento, a tensão e o alongamento são:

$$f_{yd} = \frac{f_y}{1,15}$$
 e $\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} + 0,002$

Na falta de ensaios, pode-se obedecer aos detalhes indicados no diagrama da fig (b).

Observa-se na figura (b) que até uma tensão de 0.7 da tensão de escoamento superficial de cálculo f_{yd} , o diagrama é linear. No trecho AE, o diagrama é curvo, sendo E o ponto de escoamento convencional do aço sem patamar (correspondente à deformação residual de 2mm/m ao descarregar a armadura durante o ensaio).

O prolongamento da linha OA, até a linha EF', paralela ao eixo, dá o ponto B que determina o diagrama OBF', correspondente a um aço de categoria A com o mesmo escoamento do aço B representado na linha OAEF.

Se adotarmos ao aço de categoria B um patamar de escoamento a partir do ponto E, verificaremos que dois aços de mesmo escoamento de categorias A e B tem diagramas coincidentes nos trechos OA e EF', diferindo somente no trecho AE, que é curvo no aço de categoria B e composto de duas retas no aço de categoria A.

1.3 - Propriedades do Concreto

As características essenciais do concreto, a considerar no dimensionamento à flexão, são o seu encurtamento máximo $\varepsilon_{cd} = 3.5$ mm/m e sua resistência característica f_{ck} .

Esta última é calculada em função da resistência adotada para efeito de dosagem do concreto, em função da resistência do concreto com 28 dias de idade, ou seja:

$$f_{ck} = f_{c28} - 1,65 S_d$$

onde:

-1,65 é o coeficiente dado pela teórica das probabilidades, com o objetivo de garantir que somente 5% dos corpos de prova se rompam com resistência inferior a f_{ck} ;

 $-S_d$ é o desvio padrão de dosagem igual ao desvio padrão S_n multiplicado por um coeficiente X_n que varia de 1,10 a 1,35, em função do número de corpos de prova.

Não se toma para S_d valor inferior a $20kg/cm^2$. Quando não é conhecido o desvio padrão S_n , o construtor fixa o valor de f_{c28} , a ser usado no cálculo da dosagem, partindo do modo como pretende conduzir a construção.

Para S_d utilizam-se os seguintes valores:

a) Quando houver assistência de profissional legalmente habilitado, especializado em tecnologia do concreto, todos os materiais forem medidos em peso e houver medidor de água, corrigindo-se as quantidades de agregados miúdo e de água em função de determinações freqüentes e precisas do teor de umidade dos agregados, e houver garantia de manutenção, no decorrer da obra, da homogeneidade dos materiais a serem empregados:

$$S_d = 40 \text{ kg/cm}^2 (4 \text{ MPa})$$

b) Quando houver assistência de profissional habilitado, especializado em tecnologia do concreto, o cimento for medido em peso e os agregados em volume, e houver medidos de água, com correção do volume do agregado miúdo e da quantidade de água em função de determinações freqüentes e precisas do teor de umidade dos agregados:

$$S_d = 55 \text{ kg/cm}^2 (5.5 \text{ MPa})$$

c) Quando o cimento for medido em peso e os agregados em volume e houver medidor de água, corrigindo-se a quantidade de água em função da umidade dos agregados simplesmente estimada:

$$S_d = 70 \text{ Kg/cm}^2 (7 \text{ MPa})$$

Quando o projetista fixa o valor da resistência característica f_{ck} , o construtor deverá dosar o concreto para uma resistência a 28 dias com os valores indicados pelas fórmulas acima, em função do tipo de controle que será adotado na execução do concreto.

Se, ao contrário, o construtor fornecer a resistência que prevê para o concreto a 28 dias, e, ao mesmo tempo, informa o controle que adotará, o projetista tirará f_{ck} em função de f_{c28} usando as mesmas fórmulas.

Exemplos:

a)Se o projetista usou a resistência $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$ e o construtor efetuou o controle do tipo **a** para o concreto, a resistência de dosagem será:

$$f_{c28} = 150 + 1,65 . 40 = 216 \text{ kg/cm}^2$$

b) Se o construtor pretende dosar um concreto para obter f_{c28} = 200 kg/cm² e vai usar o tipo ${\bf c}$ de controle do concreto, a resistência característica para o cálculo da estrutura será:

$$f_{ck} = 200 - 1,65 \cdot 70 = 85 \text{ kg/cm}^2$$

A tabela a seguir apresenta valores aproximados de consumo de material, dosagem, rendimento e resistência dos principais traços de concretos.

TABELA 1
Traços de concreto, confecção e suas respectivas resistências.

Traço		Consumo de cimento por m ³ de concreto		Consumo de areia por m		Consumo de brita e água por m de concreto			Fck (kg/cm²) provável Idade em dias			
em volume	em peso	kg	sacos de 50 kg	litros	seca litros	3% de umidade litros	nº 1 litros	nº 2 litros	Água litros	3	7	28
1:1:2	1:1,08:1,96	514	10,3	363	363	465	363	363	226	228	300	400
1:11/2:3	1:1,63:2,94	387	7,7	273	409	524	409	409	218	188	254	330
1:2:21/2	1:2,17:2,94	374	7,5	264	528	676	330	330	206	148	208	290
1:2:3	1:2,17:2,94	344	6,9	243	486	622	364	364	210	117	172	254
1:21/2:3	1:2,71:2,94	319	6,4	225	562	719	337	332	207	100	150	225
1:2:4	1:2,17:3,92	297	5,94	210	420	538	420	420	202	90	137	210
1:21/2:4	1:2,71:3,92	276	5,5	195	487	623	390	390	201	74	114	185
1:21/2:5	1:2,71:4,69	246	4,8	174	435	657	435	435	195	58	94	157
1:3:5	1:3,25:4,89	229	4,6	162	486	622	405	405	202	40	70	124
1:3:6	1:3,28:3,87	208	4,2	147	441	564	441	441	198	30	54	100
1:4:8	1:4,34:7,83	161	3,2	111	436	584	456	456	194	-	-	-

Traço	Altura das caixas 35x45 cm			Nº. de caixas por saco de cimento			Fat	ores a/c e	Rendimento por saco de 50kg	
Em volume	Areia	Brita 1	Brita 2	Areia	Brita 1	Brita 2	l/kg	kg/l	l/saco	Litros de concreto
1:1:2	20,7	22,4	22,4	1	1	1	0,44	2,27	22,0	97,2
1:11/2:3	21,5	33,6	33,6	2	1	1	0,49	2,04	24,5	129,2
1:2:21/2	28,7	28,1	28,1	2	1	1	0,55	1,62	27,5	133,2
1:2:3	28,7	33,6	33,6	2	1	1	0,61	1,64	30,3	145,6
1:21/2:3	23,9	33,6	33,6	3	1	1	0,65	1,54	32,5	157,9
1:2:4	28,7	22,4	22,4	2	2	2	0,66	1,47	34,0	168,3
1:21/2:4	23,9	22,4	22,4	3	2	2	0,73	1,37	36,5	181,2
1:21/2:5	23,9	28,0	28,0	3	2	2	0,79	1,27	39,5	203,3
1:3:5	28,7	28,0	28,0	3	2	2	0,88	1,14	44,0	218,1
1:3:6	28,7	33,6	33,6	3	2	2	0,95	1,05	47,5	240,9
1:4:8	28,7	29,9	29,9	4	3	3	1,20	0,83	60,0	312,5

1.4 - Tipos de ruptura

Quando se imagina a ruptura realizada com a concomitância do esmagamento do concreto (ϵ_{cd} = 3,5 mm/m) e a tensão máxima de tração na armadura (fyd) diz-se que a secção é normalmente armada.

A figura a seguir mostra a situação da seção normalmente armada. Neste caso, supõe-se que o esmagamento do concreto na zona comprimida se realizou no exato momento em que a armadura iniciou o escoamento.

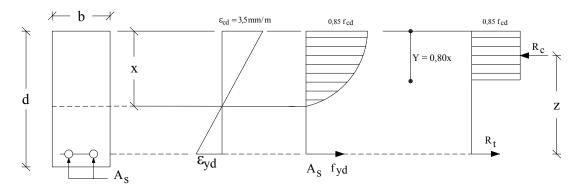
Há, no entanto, a considerar que isto nem sempre acontece, podendo as seções ser super-armadas ou sub-armadas.

Nas peças super-armadas, o esmagamento do concreto se inicia antes de a armadura entrar em escoamento e nas peças sub-armadas, a armadura entra em escoamento antes de o concreto comprimido se romper.

É o caso de peças com altura superior à obtidas no cálculo da seção normalmente armada. Na realidade, na prática, para economizar armadura, é comum usarem-se alturas grandes, sendo portando, muito frequente o uso de seção sub-armada.

1.5 - Fórmulas gerais para o cálculo das seções retangulares com armadura simples.

Com a observação da figura a seguir pode-se chegar às fórmulas de dimensionamento.



Estabelecendo a condição de o esmagamento do concreto (ruptura por compressão) se realizar no mesmo momento em que se inicia o escoamento do aço, deduz-se a fórmula que dá a altura mínima.

Para que a ruptura do concreto e o escoamento do ferro se iniciem concomitantemente, devem ser atingidas, ao mesmo tempo, as deformações ε_{cd} e ε_{yd} . Assim:

Para o concreto: $\varepsilon_{cd} = 3.5 \text{ mm/m}$.

Como já foi visto, para o aço com patamar de escoamento, o alongamento da armadura no início do escoamento é dado pela fórmula:

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Onde: Es é o módulo de elasticidade do aço cujo o valor é 2.100.000 kg/cm².

Para os ferros encruados sem patamar de escoamento a fórmula é:

$$\varepsilon_{\rm yd} = \frac{f_{\rm yd}}{E_{\rm s}} + 0,002$$

Onde: f_{vd} é a tensão de escoamento convencional de cálculo.

Na tabela que se segue estão escritos os valores de f_y , f_{yd} e ϵ_{yd} para os principais aços brasileiros.

TABELA 2
Tensões de escoamento e deformações de aços brasileiros

Aço	f _y (kg/cm ²)	$f_{yd}(kg/cm^2)$	$\varepsilon_{\rm yd}({ m mm/m})$	$\varepsilon_{\rm yd}({ m mm/m})$
CA-50A	5000	4348	2,070	-
CA-60A	6000	5217	2,484	-
CA-50B	5000	4348	-	4,070
CA-60B	6000	5217	-	4,484

Em MPa dividir por 10.

A lei de Bernoulli permite obter a posição da linha neutra no estado limite último:

$$X = \frac{\epsilon_{cd}}{\epsilon_{cd} + \epsilon_{vd}} \cdot d = \xi d$$

Com o valor de X calcula-se y:

$$Y = 0.8 \cdot x = 0.8 \cdot \xi d$$

Fazendo $s = 0.8\xi$, tem-se

$$Y = sd$$

Partindo dos valores ϵ_{cd} = 3,5 mm/m e de ϵ_{yd} , encontra-se na tabela 3 os valores de ξ e s para os aços usados na prática, onde se vê que a posição da linha neutra não depende das tensões limites.

O equilíbrio entre o momento de ruptura Md e o sistema de tensões (Fig. anterior) é:

$$M_d = R_c \cdot Z = R_t \cdot Z$$

onde, conforme a figura, tem-se:

$$Z = d - \frac{Y}{2} = d \left(1 - \frac{s}{2} \right)$$

Quanto às resultantes das tensões, tem-se:

$$R_c = 0.85 \text{ b. y. } f_{cd} \quad e \quad R_t = A_s. f_{yd}$$

Fazendo:
$$1 - \frac{S}{2} = \varphi$$

tem-se:
$$Z = \varphi \cdot d$$
 e $y = s.d$

Cálculo da Altura

Para efeito de cálculo da altura, substitui-se R_c e Z na fórmula de M_d por seus respectivos valores. Então:

$$M_d = 0.85 \ b \cdot d \cdot s \cdot f_{cd} \cdot \phi \cdot d$$

ou seja:
$$M_d = 0.85 \text{ s. } \phi \text{ . b. } d^2 \text{ . } f_{cd}$$

fazendo: $\mu = 0.85 \text{ s. } \phi$, tem-se:

$$M_d = \mu \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}$$

Onde pode-se chegar a

$$d = \sqrt{\frac{1}{\mu \cdot f_{cd}}} \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b}}$$

Chamando de r o primeiro radical, tem-se:

$$d = r \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b}}$$

As fórmulas anteriores são absolutamente gerais, pois independem dos coeficientes γ_f e γ_c .

Os valores de μ e r são encontrados na tabela 3. Nesta tabela, pode-se entrar com f_{cd} independentemente do valor γ_c . Entrando com f_{ck} o valor de γ_c = 1,4 está implícito.

TABELA 3
Elementos para cálculo da altura mínima de seções retangulares com armadura simples (seção normalmente armada)

Para M_d em kgm, b em m, A em cm² e d em cm

Aço	f	f	۶	9	Ø	ц	α	Valo	res de 1	· para γ	_c =1,4 e	f _{ck} (kg/	cm²) ig	ual a
Tiço	y	yd	9	3	Ψ	μ	u	100	120	140	160	180	200	220
CA-50A	5000	4348	0.628	0.503	0.749	0.320	32.55	0.209	0.191	0.177	0.165	0.156	0.148	0.141
CA-50B	5000	4348	0.462	0.370	0.815	0.256	35.44	0.234	0.213	0.198	0.185	0.174	0.165	0.158
CA-60A	6000	5217	0.585	0.468	0.766	0.305	39.97	0.214	0.196	0.181	0.169	0.160	0.152	0.144
CA-60B	6000	5217	0.438	0.351	0.825	0.246	43.03	0.239	0.218	0.202	0.189	0.178	0.169	0.161
	Valores de f_{cd} para entrada quando $\gamma_c \neq 1,4$						1	71	86	100	114	129	143	157

Cálculo da armadura

Tem-se, pela equação de equilíbrio, substituindo Rt e z por seus valores:

$$M_d = A_s$$
. f_{vd} . φ . d

Portanto:

$$A_{s} = \frac{M_{d}}{\phi \cdot f_{vd} \cdot d}$$

O cálculo da armadura costuma ser feito adotando-se um valor prévio para d. Neste caso, calcula-se um dos valores:

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad \text{ou} \quad r = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_d}{b}}}$$

A entrada na tabela com o valor de μ permite usar qualquer valor para f_{cd} .

Entrando com um destes valores na tabela 4, obtêm-se os coeficientes ϕ e α com os quais se calcula a seção de ferros.

Para se obter A_s em cm² entrando com o momento em kgm, basta usar d em metro nesta fórmula. Com o momento em tm, usa-se fyd em t/cm² e d em metro para se obter A_s em cm².

O mesmo se obtém usando d em cm se fizer

$$\alpha = \frac{\phi \cdot f_{yd}}{100}$$

Assim, com M_d em kgm e d em cm, obtém-se A_s em cm² pela fórmula:

$$A_{s} = \frac{M_{d}}{\alpha \cdot d}$$

onde o valor de α se obtém entrando na tabela 4 com μ ou r.

 $TABELA\ 4$ Elementos para cálculo da armadura para seções retangulares com armadura simples $Para\ M_d\ em\ kgm,\ b\ em\ m,\ d\ em\ cm\ e\ A_s\ em\ cm^2$

s			α par	a aço		Valores	de r para	$\gamma_c = 1.4 \text{ e}$	f _{ck} (kg/cm²) igual a	
5	φ	μ	50	60	100	120	140	160	180	200	220
0.048	0.931	0.041	40.48	48.57	0.584	0.533	0.494	0.462	0.436	0.413	0.394
0.138	0.931	0.109	40.48	48.57	0.358	0.327	0.303	0.283	0.267	0.253	0.242
0.140	0.930	0.111	40.43	48.52	0.356	0.325	0.301	0.281	0.265	0.252	0.240
0.160	0.920	0.125	40.00	48.00	0.334	0.305	0.283	0.264	0.249	0.237	0.226
0.180	0.910	0.139	39.57	47.48	0.317	0.270	0.268	0.251	0.236	0.224	0.214
0.200	0.900	0.153	39.13	46.96	0.303	0.276	0.256	0.239	0.226	0.214	0.204
0.220	0.890	0.166	38.70	46.43	0.290	0.265	0.245	0.229	0.216	0.205	0.196
0.240	0.880	0.180	38.26	45.91	0.279	0.255	0.236	0.221	0.208	0.198	0.188
0.260	0.870	0.192	37.83	45.39	0.270	0.246	0.288	0.213	0.201	0.191	0.182
0.280	0.860	0.205	37.39	44.87	0.262	0.239	0.221	0.207	0.195	0.185	0.176
0.300	0.850	0.217	36.96	44.35	0.254	0.232	0.215	0.201	0.189	0.180	0.171
0.320	0.840	0.228	36.52	43.83	0.248	0.226	0.209	0.196	0.185	0.175	0.167
0.340	0.830	0.240	36.09	43.30	0.242	0.221	0.204	0.191	0.180	0.171	0.163
0.360	0.820	0.251	35.65	42.78	0.236	0.216	0.200	0.187	0.176	0.167	0.159
0.380	0.810	0.262	35.22	42.26	0.231	0.211	0.196	0.183	0.172	0.164	0.156
0.400	0.800	0.272	34.78	41.74	0.227	0.207	0.192	0.179	0.169	0.160	0.153
0.420	0.790	0.282	34.35	41.22	0.223	0.203	0.188	0.176	0.166	0.158	0.150
0.440	0.780	0.292	33.91	40.70	0.219	0.200	0.185	0.173	0.163	0.155	0.148
0.460	0.770	0.301	33.48	40.17	0.216	0.197	0.182	0.171	0.161	0.153	0.145

continuação

s	φ	.,	α par	a aço	Valores de r para $\gamma_c = 1.4$ e f_{ck} (kg/cm ²) igual a							
3		μ	50	60	100	120	140	160	180	200	220	
0.480	0.760	0.310	33.04	39.65	0.213	0.194	0.180	0.168	0.158	0.150	0.143	
0.500	0.750	0.319	32.61	39.13	0.210	0.191	0.177	0.166	0.156	0.148	0.141	
0.520	0.740	0.327	32.17	38.61	0.207	0.189	0.175	0.163	0.154	0.146	0.140	
0.540	0.730	0.335	31.74	38.09	0.204	0.187	0.173	0.162	0.152	0.145	0.138	
0.560	0.720	0.343	31.30	37.57	0.202	0.185	0.171	0.160	0.151	0.143	0.136	
0.580	0.710	0.350	30.87	37.04	0.200	0.183	0.169	0.158	0.149	0.141	0.135	
0.600	0.700	0.357	30.43	36.52	0.198	0.181	0.167	0.157	0.148	0.140	0.134	
0.620	0.690	0.364	30.00	36.00	0.196	0.179	0.166	0.155	0.146	0.139	0.132	
0.640	0.680	0.370	29.57	35.48	0.195	0.178	0.164	0.154	0.145	0.138	0.131	
0.660	0.670	0.376	29.13	34.96	0.193	0.176	0.163	0.153	0.144	0.137	0.130	
0.680	0.660	0.381	28.70	34.43	0.192	0.175	0.162	0.151	0.143	0.136	0.129	
0.700	0.650	0.387	28.26	33.91	0.190	0.174	0.161	0.150	0.142	0.135	0.128	

2 - Cálculo dos esforços nas lajes

2.1 - Classificação das lajes

As lajes se classificam em dois grupos:

- a) Lajes armadas numa única direção, quando a relação entre o maior e o menor vão é maior do que 2. São calculadas como apoiadas em uma só direção (vão menor).
- b) Lajes armadas em cruz, quando a relação entre o maior e o menor vão é menor ou igual a 2. São calculadas como apoiadas nas duas direções.

2.2 - Carga por metro quadrado

A primeira operação de cálculo de uma laje é a determinação da carga que atua em cada metro quadrado, a qual se compõe das seguintes parcelas:

I) Carga útil ou sobrecarga, constituída pelo peso dos móveis, pessoas e objetos que atuam sobre a laje.

a) em forros não destinados a depósitos	50 kg/m^2
b) em dormitórios, salas, copa, cozinha e banheiro	. 150 kg/m ²
c) em despensa, áreas de serviço, lavanderia e escritórios	200 kg/m ²
d) em salas de reuniões ou de acesso público	$300\;kg/m^2$

f) em salas de arquivos, bibliotecas ou depósitos, determinar conforme o caso.

Em qualquer parapeito deve-se considerar aplicada, na altura do corrimão, carga horizontal de 80 kg/m (0.8 kN/m).

II) Peso próprio da laje, que é determinado partindo de uma altura estimada para a laje. Esta altura, que nos casos de edificios comuns varia de 5 a 12 centímetros, deve ser multiplicada pelo peso específico do concreto armado (2.500 kg/m³), para se ter o peso próprio por metro quadrado de laje.

A espessura das lajes não deve ser menor que:

- a) 5 cm em lajes de cobertura não em balanço;
- b) 7 cm em lajes de piso e lajes em balanço;
- c) 12 cm em lajes destinadas a passagem de veículos.

III) Peso do pavimento e revestimento, incluindo peso dos tacos ou ladrilhos, camada de fixação e revestimento inferior das lajes.

Geralmente toma-se 50 kg/m².

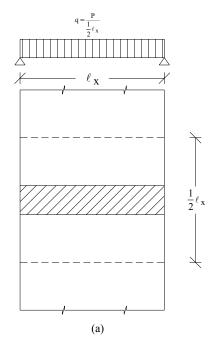
IV) Peso de paredes.

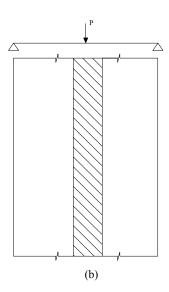
Havendo paredes que carreguem sobre a laje, deve-se calcular o peso por metro corrente dessas paredes, o que se obtém multiplicando o pé direito pela espessura e pelo peso específico do material. Para a alvenaria de tijolos maciços, o peso específico é de 1.600 kg/m³ e para a de tijolos furados 1.200 kg/m³.

Nas lajes armadas em cruz, a carga das paredes é computada dividindo o peso total das paredes pela área da laje, obtendo-se uma nova parcela para a carga por metro quadrado. Já no caso das lajes armadas numa só direção, a carga da parede deve ser estudada atendendo à sua situação como carga aplicada em uma faixa de pequena largura, como passamos a expor.

Para as lajes armadas numa direção, deve-se distinguir dois casos: paredes paralelas à direção da armação e paredes normais a esta direção.

No primeiro caso, considera-se a parede como distribuída em uma faixa de largura igual a 1/2 do vão menor (direção da armação, Figura a). No segundo caso, a parede deve ser considerada como concentrada (Figura b).

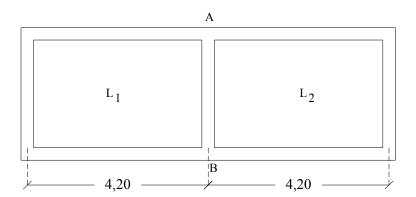




V) Peso de enchimento.

Nas lajes rebaixadas destinadas a prever espaço para execução de canalizações, quando for projetada uma camada de enchimento, deve-se calcular a carga por metro quadrado, devida ao enchimento, multiplicando a sua espessura pelo peso específico de 1.000 kg/m³ (escória, pedaços de tijolos com argamassa magra, etc).

Os rebaixos de varanda têm, em geral, 5 cm, sendo que este tipo de rebaixo não leva enchimento. Nas varandas constituídas por lajes em balanço, será preferível não usar rebaixo, para evitar emprego de um detalhe complicado de armadura negativa, quando há diferença de nível entre a laje do balanço e a laje vizinha.



Exercício: Seja calcular a carga por metro quadrado do piso para habitação comum dado na figura a seguir.

1) Sobrecarga (pessoas e móveis para habitação comum) 150 kg/m²

2) Peso da pavimentação (Pavimento, camada de fixação e revest) 50 kg/m²

3) Peso próprio (Para espessura de 8 cm) 2.500×0.08 200 kg/m^2

 $p = 400 \text{ kg/m}^2$

2.3 - Carga das lajes armadas em uma direção.

Estudada a determinação da carga que atua em cada metro quadrado de laje, supomos conhecida essa carga, que designaremos pela letra p.

Com o fim de simplificar o cálculo das lajes, vamos dividi-las em uma série de faixas de largura igual a 1 metro, que imaginamos independentes entre si.

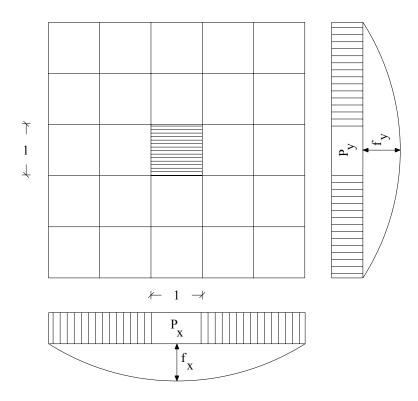
As lajes armadas numa direção são calculadas como apoiadas nesta direção. A carga que atua por metro corrente na faixa de largura igual a 1 metro é a mesma carga p, determinada anteriormente.

2.4 - Carga das lajes armadas em cruz

Consideram-se como armadas em duas direções ou armada em cruz, as lajes em que a relação entre o maior e o menor vão não é maior que 2, como já foi dito. Estudaremos os dois casos: lajes isoladas e lajes contínuas.

Caso das lajes isoladas

Suponhamos uma laje isolada apoiada em 4 paredes ou vigas e dividamo-la em duas séries de faixas ortogonais de 1 metro de largura.



A teoria denominada das "grelhas", para a determinação das cargas nas lajes armadas em cruz, consiste em dividir a carga por metro quadrado em duas partes px e py, uma para cada direção, de modo que se tenha:

$$p_x + p_y = p$$

A laje deve resistir aos esforços que se desenvolvem nas duas direções sob a ação das cargas, p_x e p_v .

Para a determinação das partes ou quinhões de carga, p_x e p_y , admite a teoria das grelhas que as faixas são independentes entre si e que os referidos quinhões são constantes para cada ponto da laje, em cada direção.

Para o cálculo de p_x e p_y , tomam-se as duas faixas centrais e igualam-se as flechas no ponto central, calculadas nas duas direções.

Para o caso de apoio nos quatro lados, tem-se:

$$f_x = \frac{5 \cdot p_x \cdot \ell_x^4}{384 \cdot E \cdot I}$$
 e $f_y = \frac{5 \cdot p_y \cdot \ell_y^4}{384 \cdot E \cdot I}$

Como devemos fazer $f_x = f_y$, tem-se:

$$p_x \cdot \ell_x^4 = p_y \cdot \ell_y^4$$

onde:

$$\frac{p_{x}}{\ell_{y}^{4}} = \frac{p_{y}}{\ell_{x}^{4}} = \frac{p_{x} + p_{y}}{\ell_{y}^{4} + \ell_{x}^{4}} = \frac{p}{\ell_{y}^{4} + \ell_{x}^{4}}$$

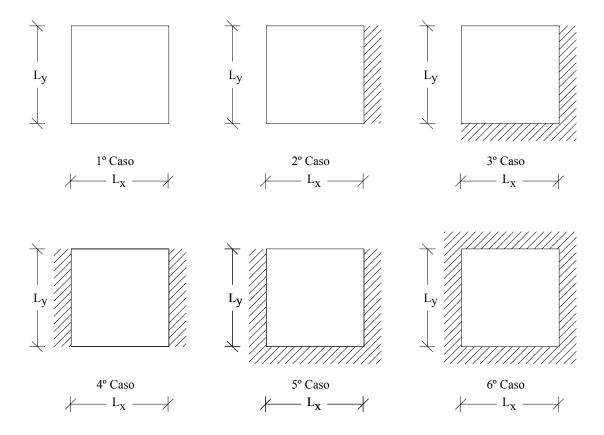
portanto:

$$p_{x} = \frac{\ell_{y}^{4}}{\ell_{x}^{4} + \ell_{y}^{4}} \cdot p$$

$$p_{y} = \frac{\ell_{x}^{4}}{\ell_{x}^{4} + \ell_{y}^{4}} \cdot p$$

Substituindo cada apoio simples por um engaste perfeito, pode-se formar outros 5 casos de apoios, para os quais pode-se determinar as fórmulas dos quinhões. Nestes casos a igualdade das flechas far-se-á sempre no centro da laje, como acabamos de fazer.

Apresenta-se, a seguir, em resumo, as fórmulas dos quinhões para os 6 casos de apoio indicados na figura a seguir, que mais aparecem na prática. Os hachurados na figura indicam engastes perfeitos.



Para a obtenção das fórmulas dos quinhões, parte-se das seguintes expressões que dão as flechas no centro de peças sujeitas a carga uniformemente distribuída.

Vigas em dois apoios:

$$f = \frac{5 \cdot p \cdot \ell^4}{384 \, \text{E} \cdot \text{I}}$$

Viga com 1 apoio e 1 engaste:

$$f = \frac{2 \cdot p \cdot \ell^4}{384 \, E \cdot I}$$

Vigas com 2 engastes:

$$f = \frac{p \cdot \ell^4}{384 \, E \cdot I}$$

Encontra-se para os seis casos de lajes isoladas da figura, fórmulas idênticas à fórmula obtida anteriormente. Dividindo por ℓ_x^2 e chamando de λ a relação entre ℓ_y e ℓ_x , obtem-se as fórmulas abaixo:

$$\frac{1.^{\circ} \operatorname{Caso}}{\lambda} = \frac{\ell_{y}}{\ell_{x}} \qquad p_{x} = \frac{\lambda^{4}}{\lambda^{4} + 1} \cdot p \qquad p_{x} = \frac{5 \cdot \lambda^{4}}{5 \cdot \lambda^{4} + 2} \cdot p$$

$$\frac{3.^{\circ} \operatorname{Caso}}{p_{x}} = \frac{\lambda^{4}}{\lambda^{4} + 1} \cdot p \qquad p_{x} = \frac{5 \cdot \lambda^{4}}{5 \cdot \lambda^{4} + 1} \cdot p$$

$$\frac{5.^{\circ} \operatorname{Caso}}{2 \cdot \lambda^{4} + 1} \cdot p \qquad p_{x} = \frac{\lambda^{4}}{\lambda^{4} + 1} \cdot p$$

$$p_{x} = \frac{2 \cdot \lambda^{4}}{2 \cdot \lambda^{4} + 1} \cdot p$$

$$p_{x} = \frac{\lambda^{4}}{\lambda^{4} + 1} \cdot p$$

De um modo genérico, pode-se escrever $p_x = k_x$. p, sendo k_x em função de λ .

Quando a condição de apoio é a mesma nas duas direções, pode-se empregar sempre a fórmula do primeiro caso. Para a resolução rápida dos quinhões, empregam-se as tabelas 5 a 11, que dão coeficiente k_x em função de λ . Para o 1º caso, por exemplo, o valor kx é;

$$k_x = \frac{\lambda^4}{\lambda^4 + 1}$$

Os quinhões acham-se pelas fórmulas gerais:

$$p_x = k_x \cdot p \qquad e \qquad p_y = k_y \cdot p = (1 \text{-} k_x) \ p = p \text{-} p_x$$

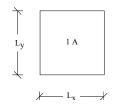
Caso das lajes contínuas

O cálculo dos quinhões de carga nas lajes contínuas, recai no caso das lajes isoladas, se se supor que cada viga ou apoio intermediário assemelha-se a um engaste perfeito e cada viga ou apoio externo funciona como apoio simples.

Nestas condições, pode-se considerar cada painel como isolado, possuindo no contorno engaste ou apoio simples, conforme se trate de viga central ou extrema.

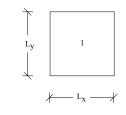
TABELA 5 Cálculo das lajes em cruz – Marcus

$$M_x = \frac{q\ell x^2}{m_x}$$
 $M_y = \frac{q\ell x^2}{m_y}$ $q_x = k_x q$



ℓ_{y}/ℓ_{x}	k _X	m _X	my
0,50	0,059	169,18	42,29
0,52	0,068	148,64	40,19
0,54	0,078	131,55	38,36
0,56	0,089	117,25	36,77
0,58	0,102	105,19	35,38
0,60	0,115	94,94	34.18
0,62	0,129	86,20	33,13
0,64	0,144	78,68	32,23
0,66	0,159	72,19	31,44
0,68	0,176	66,54	30,77
0,70	0,194	61,60	30,18
0,72	0,212	57,27	29,69
0,74	0,231	53,44	29,26
0,76	0,250	50,04	28,90
0,78	0,270	47,01	28,60
0,80	0,290	44,29	28,34
0,82	0,311	41,84	28,13
0,84	0,332	39,62	27,96
0,86	0,354	37,61	27,81
0,88	0,375	35,77	27,70
0,90	0,396	34,09	27,61
0,92	0,417	32,54	27,54
0,94	0,438	31,11	27,49
0,96	0,459	29,79	27,45
0,98	0,480	28,57	27,43
1,00	0,500	27,43	27,43

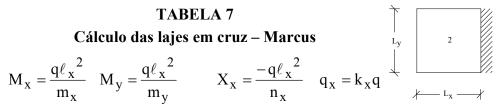
TABELA 6 Cálculo das lajes em cruz – Marcus



$M = \frac{q\ell_x^2}{2}$	$M_y = \frac{q\ell_x^2}{m_y}$	a = k a
m_{X}	m_y	$\mathbf{q}_{\mathbf{X}} - \mathbf{k}_{\mathbf{X}} \mathbf{q}$

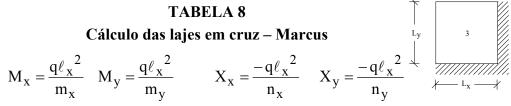
$\ell_{\mathbf{y}}/\ell_{\mathbf{x}}$	k _X	m _X	my	$\ell_{\mathbf{y}}/\ell_{\mathbf{x}}$	$\mathbf{k}_{\mathbf{X}}$	m _X	my
1,00	0,500	27,43	27,43	-	-	-	-
1,02	0,520	26,37	27,43	1,52	0,842	13,64	31,52
1,04	0,539	25,38	27,45	1,54	0,849	13,43	31,85
1,06	0,558	24,46	27,48	1,56	0,855	13,22	32,18
1,08	0,576	23,60	27,52	1,58	0,862	13,03	32,53
1,10	0,594	22,79	27,57	1,60	0,868	12,85	32,80
1,12	0,611	22,03	27,64	1,62	0,873	12,68	33,27
1,14	0,628	21,32	27,71	1,64	0,878	12,51	33,65
1,16	0,644	20,66	27,80	1,66	0,884	12,35	34,04
1,18	0,660	20,04	27,90	1,68	0,888	12,21	34,45
1,20	0,675	19,45	28,01	1,70	0,893	12,06	34,87
1,22	0,689	18,90	28,13	1,72	0,897	11,93	35,29
1,24	0,703	18,39	28,27	1,74	0,902	11,80	35,73
1,26	0,716	17,90	28,42	1,76	0,906	11,68	36,17
1,28	0,729	17,44	28,58	1,78	0,909	11,56	36,63
1,30	0,741	17,01	28,76	1,80	0,913	11,45	37,10
1,32	0,752	16,61	28,94	1,82	0,916	11,34	37,58
1,34	0,763	16,23	29,14	1,84	0,920	11,24	38,06
1,36	0,774	15,87	29,36	1,86	0,923	11,15	38,56
1,38	0,784	15,53	29,58	1,88	0,926	11,05	39,07
1,40	0,793	15,21	29,82	1,90	0,929	10,96	39,58
1,42	0,803	14,91	30,07	1,92	0,931	10,88	40,10
1,44	0,811	14,63	30,34	1,94	0,934	10,80	40,63
1,46	0,820	14,36	30,61	1,96	0,936	10,72	41,18
1,48	0,827	14,11	30,90	1,98	0,939	10,64	41,73
1,50	0,835	13,87	31,21	2,00	0,941	10,57	42,29

TABELA 7



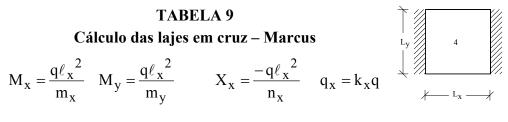
ℓ_{y}/ℓ_{x}	k _X	m _X	n _X	my
0,50	0,135	140,93	59,20	45,13
0,54	0,175	112,94	45,64	41,60
0,58	0,220	93,08	36,28	39,03
0,62	0,270	78,55	29,66	37,20
0,66	0,322	67,60	24,86	35,92
0,70	0,375	59,12	21,33	35,07
0,74	0,428	52,41	18,67	34,57
0,78	0,481	46,98	16,64	34,36
0,82	0,531	42,53	15,08	34,39
0,86	0,578	38,83	13,85	34,62
0,92	0,642	34,37	12,47	35,29
0,96	0,680	31,97	11,77	35,95
1,00	0,714	29,93	11,20	36,74
1,04	0,745	28,18	10,73	37,68
1,08	0,773	26,69	10,35	38,74
1,12	0,797	25,40	10,03	39,92
1,16	0,819	24,29	9,77	41,21
1,20	0,838	23,33	9,45	42,62
1,24	0,855	22,49	9,35	44,13
1,28	0,870	21,75	9,19	45,75
1,32	0,884	21,11	9,05	47,46
1,36	0,895	20,54	8,93	49,26
1,40	0,906	20,04	8,83	51,15
1,44	0,915	19,59	8,74	53,14
1,48	0,923	19,20	8,67	55,21
1,52	0,930	18,84	8,60	57,36
1,56	0,937	18,52	8,54	59,60
1,60	0,942	18,23	8,49	61,91
1,64	0,948	17,97	8,44	64,31
1,68	0,952	17,74	8,40	66,78
1,72	0,956	17,52	8,36	69,33
1,76	0,960	17,33	8,33	71,96
1,80	0,963	17,15	8,30	74,65
1,84	0,966	16,99	8,28	77,42
1,88	0,969	16,84	8,26	80,27
1,92	0,971	16,70	8,23	83,18
1,96	0,974	16,57	8,22	86,19
2,00	0,976	16,46	8,20	89,22

TABELA 8



ℓ_{y}/ℓ_{x}	k _X	m _X	n _X	my	ny
1,00	0,500	37,14	16,00	37,14	16,00
1,04	0,539	34,42	14,84	37,22	16,05
1,08	0,576	32,11	13,88	37,45	16,19
1,12	0,611	30,14	13,08	37,81	16,41
1,16	0,644	28,46	12,42	38,29	16,71
1,20	0,674	27,00	11,85	38,89	17,07
1,24	0,703	25,75	11,38	39,59	17,50
1,28	0,729	24,66	10,98	40,40	17,99
1,32	0,752	23,70	10,63	41,29	18,53
1,36	0,774	22,86	10,34	42,28	19,12
1,40	0,793	22,12	10,08	43,35	19,76
1,44	0,811	21,46	9,86	44,50	20,45
1,48	0,827	20,88	9,67	45,74	21,17
1,52	0,842	20,36	9,50	47,05	21,94
1,56	0,855	19,90	9,35	48,43	22,76
1,60	0,868	19,48	9,22	49,88	23,60
1,64	0,878	19,11	9,11	51,40	24,49
1,68	0,888	18,77	9,00	52,99	25,41
1,72	0,897	18,47	8,91	54,64	26,37
1,76	0,906	18,18	8,83	56,36	27,36
1,80	0,913	17,94	8,76	58,14	28,39
1,84	0,920	17,72	8,70	59,97	29,44
1,88	0,926	17,51	8,64	61,88	30,54
1,92	0,931	17,32	8,59	63,83	31,66
1,96	0,936	17,14	8,54	65,84	32,81
2,00	0,941	16,98	8,50	67,92	34,00

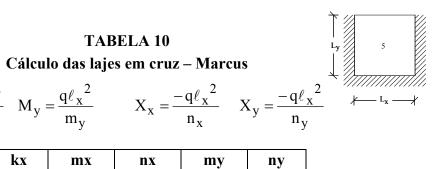
TABELA 9



$$M_x = \frac{q{\ell_x}^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q{\ell_x}^2}{m_y}$$

$$X_{X} = \frac{-q\ell_{X}^{2}}{n_{X}} \qquad q_{X} = k_{X}q$$

ℓ_y / ℓ_x	$\mathbf{k}_{\mathbf{X}}$	m _X	n _X	my
0,50	0,238	137,06	50,40	49,92
0,54	0,298	112,39	40,23	47,13
0,58	0,361	94,67	33,21	45,35
0,62	0,425	81,51	28,24	44,35
0,66	0,487	71,49	24,65	43,98
0,70	0,545	63,69	22,00	44,11
0,74	0,600	57,51	20,00	44,66
0,78	0,649	52,54	18,48	45,59
0,82	0,693	48,51	17,31	46,84
0,86	0,732	45,21	16,39	48,38
0,90	0,766	42,48	15,66	50,19
0,94	0,796	40,21	15,07	52,24
0,98	0,822	38,31	14,60	54,52
1,02	0,844	36,71	14,22	57,01
1,06	0,863	35,34	13,90	59,70
1,10	0,880	34,18	13,64	62,59
1,14	0,894	33,18	13,42	65,66
1,18	0,906	32,32	13,24	68,91
1,22	0,917	31,57	13,08	72,33
1,26	0,926	30,92	12,95	75,92
1,30	0,934	30,34	12,84	79,66
1,36	0,945	29,60	12,70	85,58
1,40	0,950	29,18	12,62	89,72
1,44	0,955	28,80	12,56	94,01
1,48	0,960	28,47	12,50	98,45
1,52	0,964	28,16	12,45	103,02
1,56	0,967	27,89	12,40	107,76
1,60	0,970	27,64	12,37	112,61
1,64	0,973	27,42	12,33	117,62
1,68	0,975	27,21	12,30	122,76
1,72	0,978	27,03	12,27	128,04
1,76	0,980	26,86	12,25	133,50
1,80	0,981	26,70	12,23	139,05
1,84	0,983	26,56	12,21	144,78
1,88	0,984	26,43	12,19	150,60
1,92	0,985	26,31	12,18	156,53
1,96	0,987	26,19	12,16	162,60
2,00	0,988	26,09	12,15	168,89



$M_{x} = \frac{q\ell_{x}^{2}}{2}$	$M_{v} = \frac{q\ell_{x}^{2}}{2}$
$^{\rm x}$ $\rm m_{\rm x}$	y m _y

$$X_{x} = \frac{-q\ell_{x}^{2}}{n_{x}} \qquad X_{y} = \frac{-q\ell_{x}^{2}}{n_{y}}$$

ℓ_{y}/ℓ_{x}	kx	mx	nx	my	ny
0,50	0,111	246,42	108,00	71,43	36,00
0,54	0,145	191,66	82,56	64,60	32,10
0,58	0,184	153,42	65,02	59,49	29,16
0,62	0,228	125,98	52,61	55,67	26,96
0,66	0,275	105,81	43,62	52,85	25,33
0,70	0,324	90,65	36,99	50,84	24,17
0,74	0,375	82,05	32,48	49,05	23,37
0,78	0,425	70,02	28,21	48,65	22,88
0,82	0,475	62,88	25,27	48,26	22,65
0,86	0,522	57,15	22,97	48,25	22,65
0,90	0,567	52,51	21,14	48,57	22,84
0,94	0,610	48,70	19,68	49,17	23,19
0,98	0,648	45,55	18,50	50,04	23,70
1,02	0,684	42,92	17,54	51,14	24,33
1,06	0,716	40,71	16,75	52,44	25,10
1,10	0,745	38,84	16,10	53,95	25,97
1,14	0,772	37,25	15,55	55,64	26,95
1,18	0,795	35,88	15,09	57,50	28,02
1,22	0,816	34,70	14,71	59,53	29,19
1,26	0,834	33,68	14,38	61,71	30,44
1,30	0,851	32,79	14,10	64,03	31,77
1,34	0,866	32,01	13,86	66,50	33,18
1,38	0,879	31,20	13,65	69,10	34,67
1,42	0,890	30,72	13,47	71,83	36,23
1,46	0,901	30,18	13,32	74,69	37,86
1,50	0,910	29,71	13,18	77,67	39,55
1,54	0,918	29,28	13,07	80,77	41,32
1,58	0,926	28,90	12,96	83,98	43,14
1,62	0,932	28,56	12,87	87,31	45,03
1,66	0,938	28,25	12,79	90,77	46,99
1,70	0,943	27,97	12,72	94,32	49,00
1,74	0,948	27,72	12,65	97,98	51,08
1,78	0,952	27,49	12,60	101,75	53,21
1,82	0,956	27,28	12,55	105,63	55,41
1,86	0,960	27,09	12,50	109,63	57,67
1,90	0,963	26,91	12,46	110,71	59,97
1,94	0,966	26,75	12,42	117,89	62,33

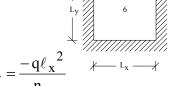


TABELA 11							
Cálculo das lajes em cruz - Marcus							
$M_x = \frac{q\ell_x^2}{m_x}$ $M_y = \frac{q\ell_x^2}{m_y}$ $X_x = \frac{-q\ell_x^2}{n_x}$ $X_y = \frac{-q\ell_x^2}{n_y}$							
M_{x}	$=\frac{q_{\ell_X}}{q_{\ell_X}}$	$-M_{y} =$	$\frac{q^{\ell}x}{x}$	$X_x =$	$\frac{-q\ell_X}{}$	$X_{y} = \frac{-q\ell_{x}}{r}$	_
	m_{X}		m_y		n_{x}	ny	
	0 10	1	M				
	$\frac{\ell_y/\ell_x}{1.00}$	0.500	Mx 55.74	24.00	my	24.00	
	1,00	0,500	55,74	24,00	55,74	24,00	
	1,04	0,539	51,76	22,26	55,88	24,07	
	1,08	0,576	48,27	20,82	56,30	24,28	
_	1,12	0,611	45,40	19,63	56,95	24,62	
_	1,16	0,644	42,97	18,63	57,82	25,06	
	1,20	0,675	40,90	17,19	58,89	25,61	
	1,24	0,703	39,12	17,07	60,15	26,25	
	1,28	0,729	37,58	16,47	61,57	26,98	
	1,32	0,752	36,25	15,95	63,16	27,79	
	1,36	0,774	35,09	15,51	64,91	28,68	
	1,40	0,793	34,08	15,12	66,79	29,64	
	1,44	0,811	33,19	14,79	68,82	30,67	
	1,48	0,827	32,40	14,50	70,97	31,76	
	1,52	0,842	31,71	14,25	73,25	32,92	
	1,56	0,855	31,09	14,03	75,65	34,13	
	1,60	0,868	30,54	13,83	78,17	35,41	
	1,64	0,878	30,04	13,66	80,80	36,74	
	1,68	0,888	29,60	13,51	83,54	38,12	
	1,72	0,897	29,20	13,37	86,38	39,55	
	1,76	0,906	28,84	13,25	89,34	41,04	
	1,80	0,913	28,52	13,14	92,39	42,58	
	1,84	0,920	28,22	13,05	95,54	44,17	
	1,88	0,926	27,95	12,96	98,80	45,81	
	1,92	0,931	27,71	12,88	102,14	47,49	
	1,96	0,936	27,49	12,81	105,58	49,21	
	2,00	0,941	27,28	12,75	109,12	50,99	

2.5 - Vãos teóricos

Para o cálculo dos momentos fletores nas lajes deve-se definir os seus vãos de cálculo ou vãos teóricos.

Considera-se como vão teórico:

a) de uma laje isolada: o vão livre acrescido da espessura da laje no meio do vão:

$$\ell = \ell' + h$$

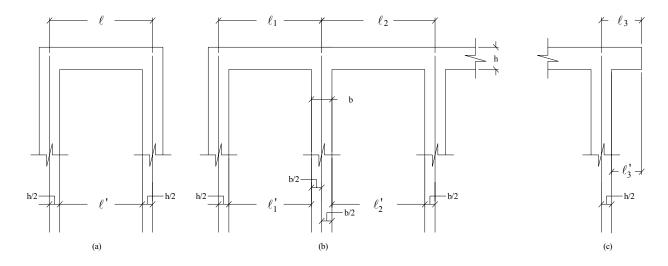
b) de uma laje contínua, vão intermediário: a distância entre os centros dos apoios:

$$\ell_2 = \ell_2' + b$$

c) de uma laje contínua, vão extremo: o vão livre acrescido da semi-largura do apoio interno e da semi-espessura da laje no meio do vão:

$$\ell_1 = \ell_1' + 0.5h + 0.5bh$$

Na figura a seguir, está representado o critério para o cálculo dos vãos teóricos ℓ em lajes, em função do vão interno ℓ ', inclusive no caso do balanço.



Na prática, nos casos em que for pequena a diferença entre a espessura das lajes (7 a 10 cm) e a largura do apoio (em geral 10 cm), pode-se tomar para vão teórico a distância entre os centros dos apoios, ou ainda:

$$\ell = \ell' + 10 \,\mathrm{cm}$$

2.6 - Momentos nas lajes armadas em uma direção

De acordo com a teoria de cálculo dos momentos fletores, encontram-se para momentos fletores máximos, M (região central) e X (no engaste), em uma laje armada numa direção, os seguintes valores:

Lajes em 2 apoios:

$$M = \frac{p \cdot \ell^2}{8} \qquad X = 0$$

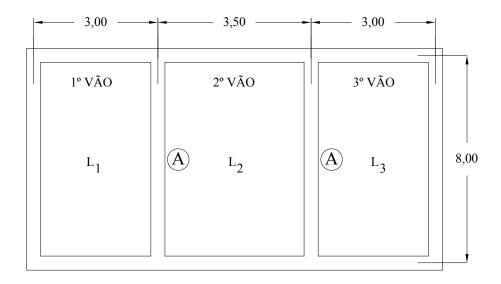
Lajes com 1 apoio e 1 engaste:

$$M = \frac{p \cdot \ell^2}{14,22} \qquad X = \frac{-p \cdot \ell^2}{8}$$

Lajes com 2 engastes:

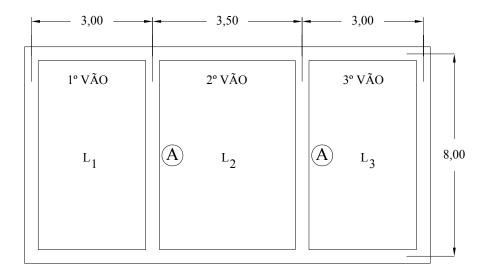
$$M = \frac{p \cdot \ell^2}{24} \qquad X = \frac{-p \cdot \ell^2}{12}$$

Exercício: Seja calcular as lajes contínuas L1, L2 da figura a seguir, armadas numa só direção. Tais lajes apóiam-se em vigas.



Como a diferença entre os vãos é pequena, pode-se empregar as fórmulas práticas que foram apresentadas.

Sobrecarga (edifício residencial comum) 150 kg/m^2 Pavimentação 50 kg/m^2 Peso próprio (espessura de 8 cm) 0.08×2500 200 kg/m^2 $p = 400 \text{ kg/m}^2$



Momentos

- 1) Lajes L₁ e L₃
- Vão: 3,00 m
- Momentos máximo no vão:

$$M_1 = M_3 = \frac{400 \cdot 3,00^2}{14,22} = 253,16 \text{ kgm}$$

- Momentos no apoio A:

$$X = -\frac{400 \cdot 3,00^2}{8} = -450 \,\text{kgm}$$

- 2) Laje central
- Vão: 3,50 m
- Momentos máximo no vão:

$$M_2 = \frac{400 \cdot 3,50^2}{24} = 204,16 \,\text{kgm}$$

- Momentos no apoio A:

$$X = -\frac{400 \cdot 3,50^2}{12} = -408,3 \,\mathrm{kgm}$$

Para o momento nos apoios A obteve-se dois valores, um para as lajes L_1 e L_3 e outro para a laje L_2 .

O critério prático consiste em fixar para X a média dos valores achados, não se adotando valores menores que 80% do maior dos momentos. Assim:

$$X_A = -\frac{450 + 408,3}{2} = -429,15 \text{ kgm}$$

Lajes em balanço:

Quando a laje contínua é dotada de um grande balanço, aconselha-se traçar o diagrama de momento fletores segundo os estudados para as vigas. No caso de balanços comuns, pode-se dispensar o traçado do diagrama de momentos, comparando-se o valor do momento do balanço com aquele obtido para a laje vizinha suposta engastada no balanço.

2.7 - Momentos nas lajes armadas em cruz pelo processo de Marcus.

O processo de Marcus será estudado para os dois casos: lajes isoladas com apoios ou engastes teóricos e lajes contínuas.

a) Caso das lajes isoladas

$$M_x = \frac{p \cdot \ell_x^2}{m_x}$$
 e $M_y = \frac{p \cdot \ell_x^2}{m_y}$

Os coeficientes m_x e m_y para cada tipo de laje só dependem da relação entre os vãos.

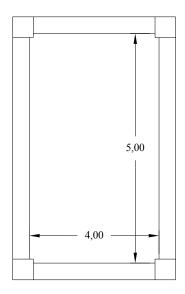
Os coeficientes m_x e m_y são encontrados nas tabelas 5 a 11, para cada caso de apoio, em função da relação ℓ_y/ℓ_x , tomando-se sempre para ℓ_x o vão na direção que possui maior número de engastes. No caso de haver igualdade de engastamento nas duas direções, deve-se tomar para ℓ_x o menor vão.

Para o cálculo dos momentos negativos, usa-se as fórmulas:

$$X_x = \frac{p \cdot \ell_x^2}{n_x}$$
 e $X_y = \frac{p \cdot \ell_x^2}{n_y}$

Os coeficientes n_x e n_y são também encontrados nas tabelas mencionadas.

Exercício: Calcular, pela teoria de Marcus e empregando a tabela do caso 1, a laje da figura a seguir, que cobre um local destinado a escritório de 4 x 5 metros, e que se apóia em vigas de contorno e suporta 50 kg/m² de paredes (0,5 kN/m²).



Paredes 50 kg/m^2 Sobrecarga 200 kg/m^2 Peso próprio 2500 x 0,10 250 kg/m^2 Pavimento e revestimento $\underline{50 \text{ kg/m}^2}$ $p = 550 \text{ kg/m}^2 \text{ (5,5 kN/m}^2)$

Vãos teóricos:

$$\ell_x = 4,00 + 0,10 = 4,10$$
 $\ell_y = 5,00 + 0,10 = 5,10$
 $\lambda = \ell_x / \ell_y = \frac{5,10}{4,10} = 1,24$

Com esse valor, entra-se na tabela 6, e encontram-se nas 2ª e 3ª colunas os coeficientes:

$$m_x = 18,39$$

 $m_y = 28,27$

Cálculos dos momentos fletores:

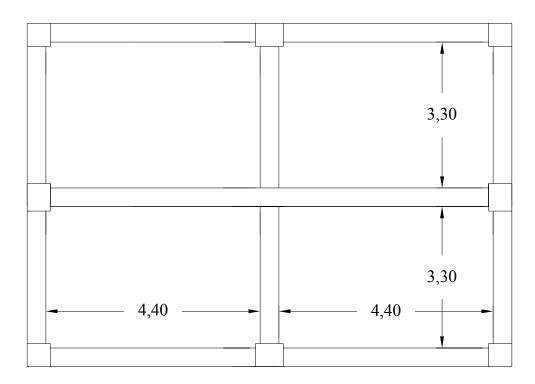
$$M_x = \frac{p \cdot \ell_x^2}{m_x} = \frac{550 \cdot 4,10^2}{18,39} = 503 \text{ kgm}$$

$$M_y = \frac{p \cdot \ell_x^2}{m_y} = \frac{550 \cdot 4,10^2}{28,27} = 327 \text{ kgm}$$

b) Caso das lajes contínuas armadas em cruz

As dificuldades que se apresenta quando investiga-se o funcionamento das lajes contínuas em cruz, em caráter preciso, provêm, em grande parte, da consideração do engastamento nos apoios internos, onde há continuidade da laje. Nestes apoios, o engaste não é rigorosamente perfeito. Muito difere, porém, de apoio simples. Para levantar esta indeterminação, Marcus considerou as lajes contínuas semelhantes às lajes isoladas, substituindo os apoios internos por engastes teoricamente perfeitos e os externos por apoios simples, como foi feito na teoria das grelhas.

Exercício: Seja calcular as quatro lajes iguais da figura a seguir, assentadas sobre vigas de 8 cm de espessura que se destinam a suportar o piso de uma habitação comum. A espessura da laje é de 8 cm.



Sendo pequena a sobrecarga, calcula-se as lajes supondo toda a carga permanente e com os casos de apoios obtidos substituindo os apoios internos por engastes perfeitos.

Vão teóricos:

$$\ell_x = 3,30 + 0,10 = 3,40 \text{ m}$$

 $\ell_y = 4,40 + 0,10 = 4,50 \text{ m}$ $\lambda = 4,50/3,40 = 1,32$

$$m_x = 23.7$$
 $n_x = 10.6$
 $m_y = 41.3$ $n_y = 18.5$
 $k_x = 0.752$

- Cálculo dos quinhões de carga

$$p_x = 0.752 \cdot 400 = 300.8 \text{ kg/m}^2$$

 $p_y = 400 - 300.8 = 99.2 \text{ kg/m}^2$

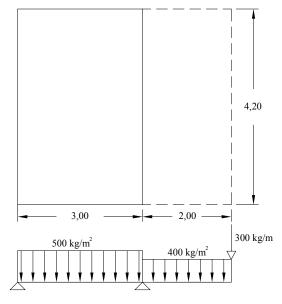
- Momentos positivos no meio do vão

$$M_x = \frac{400 \cdot 3,40^2}{23,7} = 195 \text{ kgm}$$
 $M_y = \frac{400 \cdot 3,40^2}{41,3} = 112 \text{ kgm}$

- Momentos negativos nos apoios

$$X_x = -\frac{400 \cdot 3,40^2}{10,6} = -436 \text{ kgm}$$
 $X_y = -\frac{400 \cdot 3,40^2}{18,5} = -250 \text{ kgm}$

Exercício: Calcular, a laje da figura a seguir sob a ação de uma carga uniforme de 500 kg/m² e um grande balanço sujeito à carga distribuída de 400 kg/m² e uma concentrada de 300 kg/m.



Para a laje sem o balanço tem-se os momentos (tab 6, Marcus, com $\lambda = 1,4$, caso 1):

$$M_x = 296 \text{ kgm} \qquad M_y = 151 \text{ kgm}$$

O momento do balanço será:

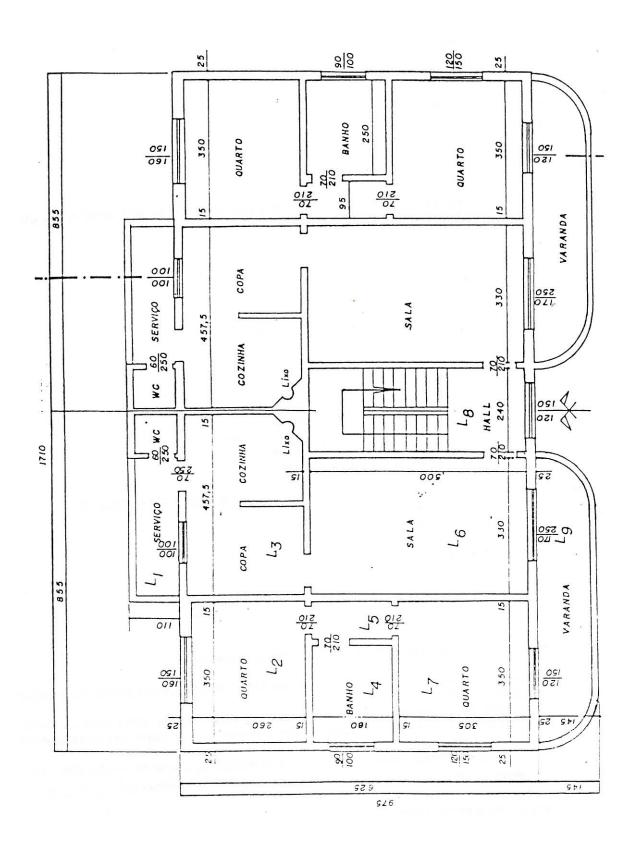
$$X_b = -\frac{400 \cdot 2^2}{2} - (300 \cdot 2) = -1400 \,\text{kgm}$$

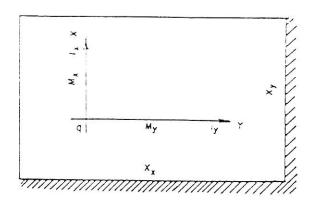
2.8 - Roteiro prático para cálculo dos momentos nas lajes contínuas.

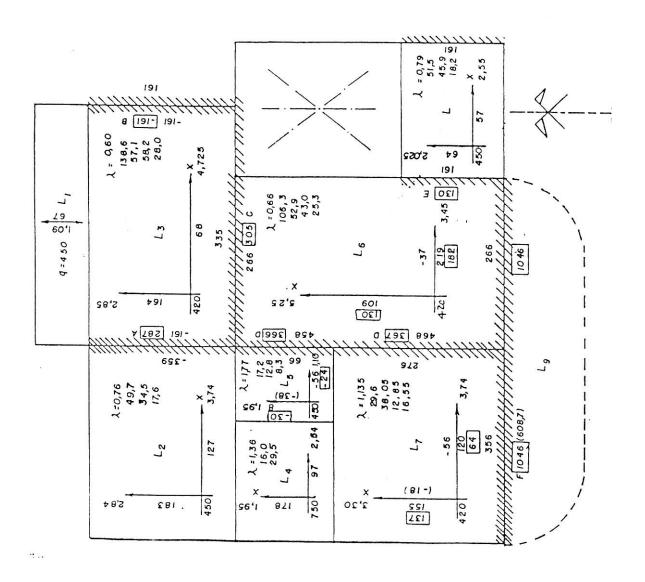
Na prática, o cálculo dos momentos nas lajes pode ser feito sobre a própria planta da estrutura, adotando-se as seguintes regras:

- a) Em cada laje traçam-se dois eixos segundo as direções x e y sendo que se adota para x a direção que possui maior número de engastamento. Quando este número for o mesmo nas duas direções, adota-se para x a direção de vão menor.
- b) Nos extremos dos eixos, escrevem-se os valores dos vãos teóricos ℓ_x e ℓ_y e na origem dos eixos a carga p. No canto direito superior, escrevem-se a relação $\lambda = \ell_x / \ell_y$ e os coeficientes m_x , m_y , n_x e n_y tiradas das tabelas 5 a 11.
- c) Em seguida, calculam-se os momentos cujos valores são colocados ao longo dos eixos e dos apoios correspondentes, como indica a figura a seguir.
- d) Calculados os momentos de todas as lajes, adota-se como momento negativo em cada apoio a média ou 0,8 do maior dos dois momentos negativos das lajes vizinhas.

A seguir apresenta-se um pavimento-tipo com a aplicação do que foi apresentado.







3 - Dimensionamento e detalhes das lajes de edifícios

3.1 - Verificação da altura

As alturas das lajes de edificios são pré-fixadas no início do cálculo dos esforços, a fim de permitir a determinação do peso próprio. Em geral, a fixação da altura é feita em função do coeficiente de esbeltez.

Antes do cálculo das armaduras é preciso confirmar as alturas escolhidas. Para isto, basta fazer a verificação para o maior momento em valor absoluto de todas as lajes para as quais se tenha fixado uma mesma altura.

Mais prático será calcular inicialmente o momento máximo Md a que resiste a laje para a altura fixada. Para tanto, usa-se a fórmula:

$$M_d = \mu.b.d^2$$
 fcd

onde μ é dado na tabela 3.

Pode-se usar d em cm, f_{cd} em kg/cm², b em m e M em kgm.

Para d=7 cm (h=8 cm), $f_{ck}=140$ kg/cm² (14 MPa) e aço comum, CA 60A, por exemplo, tem-se:

$$M_d = 0.305 \cdot 7^2 \cdot 100 = 1494.5 \text{ kgm}$$

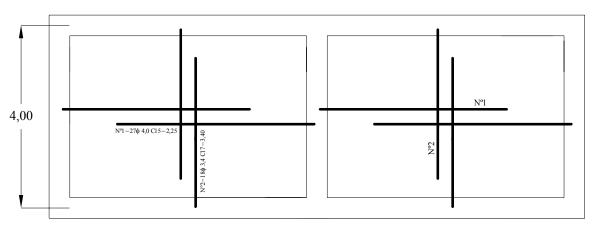
3.2 - Desenho dos detalhes de execução.

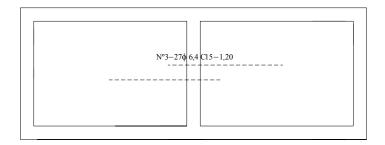
Generalidades

Os desenhos de detalhes são divididos em duas classes:

- a) Desenhos de formas, que indicam as dimensões e posições das peças e servem para confecção das mesmas.
 - b) Desenhos de armações, que indicam as dimensões e posições dos ferros.

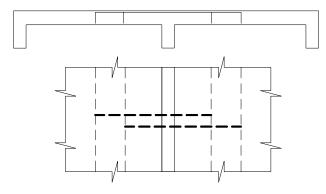
A execução dos desenhos é legislada pela ABNT. No desenho indica-se, ao longo dos ferros, o número de ordem, a quantidade, o diâmetro, o espaçamento, e o comprimento, como mostra a figura.





Os ferros calculados para os momentos positivos normalmente são colocados independentemente dos que são destinados a resistir aos momentos negativos. Neste caso, os ferros para os momentos negativos são colocados na ocasião da concretagem e antes que se inicie a pega do concreto.

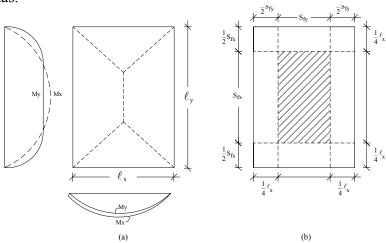
Essa disposição tem a vantagem de permitir mão de obra muito simples, de evitar o abaixamento dos ferros negativos durante a concretagem e de dispensar ferros de distribuição para os mesmos. Aconselha-se sempre o seu uso nos casos comuns, salvo nas lajes de grandes vãos, ou de grande sobrecarga, e nas lajes em balanço, para as quais se deve usar a distribuição representada no corte da figura a seguir.



Nas lajes usuais de edifícios é comum os ferros serem detalhados sem gancho, por ser pequeno o esforço de cisalhamento em presença da aderência do concreto ao ferro.

Os ferros positivos são geralmente desenhados em linha cheia pelo sistema de posições alternadas, ou usando-se alternadamente um ferro grande e um pequeno. Esta prática está relacionada à variação dos momentos fletores nas duas direções, como exemplifica a figura a seguir.

Os ferros negativos são desenhados em linhas tracejadas e em geral, pelo sistema de posições alternadas.



3.3 - Comprimento dos ferros

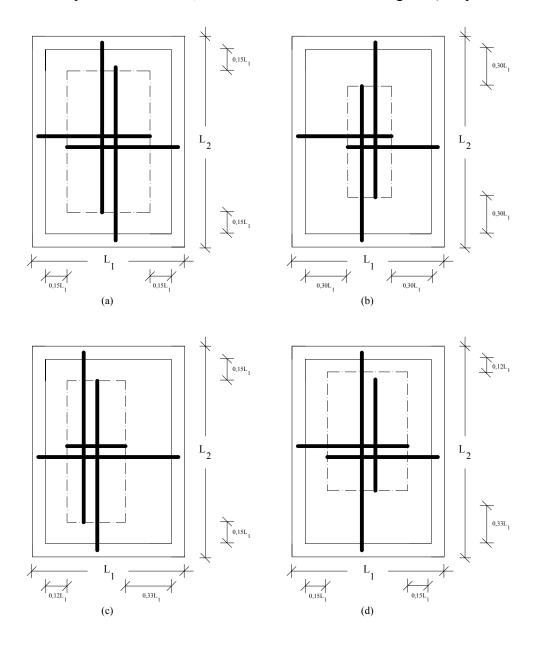
Ferragem positiva

O comprimento e a posição dos ferros positivos devem atender à forma do diagrama de momentos nos vãos isolados, extremos e centrais de uma peça contínua e atender a que, na direção do vão maior, o momento mantém-se constante na região central.

Para os vãos isolados (2 apoios), o comprimento dos ferros, quando alternados, deve ser igual ao vão teórico menos 0,15 do menor vão da laje (fig. a) e para os vãos centrais, o comprimento será o vão teórico menos 0,30 de menor vão da laje (fig. b).

Para vãos extremos, é preferível usar um ferro grande e um pequeno com a disposição das figuras (c) e (d).

O ferro pequeno será colocado, neste caso, a uma distância igual a 0,12 do menor vão no lado do apoio extremo e a 0,33 do menor vão no lado do engaste (ou apoio central).



Na prática, para simplificar a armação, tem sido usado o sistema de dimensionar o ferro em cada direção em função do vão na própria direção em vez de considerar o vão menor, como indica a teoria, e, neste caso, usa-se, às vezes, os seguintes valores para comprimento de ferros alternados.

Vão isolados	0,85
Vãos extremos	0,75
Vãos centrais	0,70

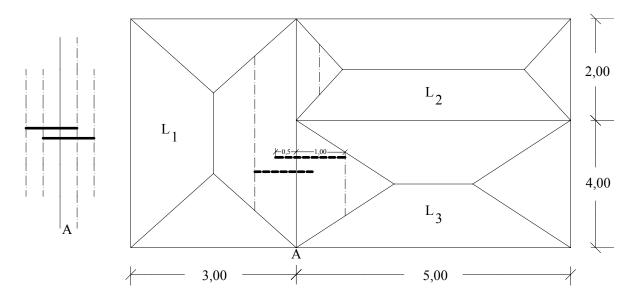
Ferragem negativa

De acordo com a norma, deve-se estender as armaduras sobre os apoios até 1/4 do maior dos menores vãos das lajes contíguas ao apoio considerado.

A figura a seguir mostra este critério para o apoio A. Das lajes vizinhas ao apoio A, a laje L_3 é aquela cujo menor vão (4,00 m) é o maior quando comparado aos menores vãos das lajes L_1 (3,00 m) e L_2 (2,00 m).

Assim, deve-se estender o ferro sobre os apoios até a distância:

$$\ell_{\rm m} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,00 \,\rm m$$



Usando ferros alternados, como mostra a figura, o comprimento destes ferros será:

$$\ell_{\rm f} = 1.5 \cdot \frac{400}{4} = 1.50 \,\rm m$$

Este resultado pode ser obtido multiplicando o maior dos menores vãos das lajes vizinhas por 3/8:

$$\ell_{\rm f} = \frac{3}{8} \cdot 4,00 = 1,50 \,\rm m$$

3.4 - Espaçamento dos ferros

Em relação aos espaçamentos dos ferros nas lajes, a norma prescreve:

- 1 De qualquer modo, quer como armadura de distribuição, nas lajes armadas em uma só direção, quer como armadura secundária, nas lajes armadas em cruz, deve-se ter um mínimo de 3 ferros com a seção de 0,9 cm² por metro linear. Esta armadura não deve ser inferior a 1/5 da armadura principal.
- 2 Nos detalhes das lajes, os espaçamentos máximos são: 20 cm ou 2 h (o menor deles) para laje armada numa direção e de 33 cm para a direção do menor momento ou para armadura de distribuição.

Para não usar, em qualquer região, um espaçamento superior a 33,3 cm (aproximadamente 34 cm), adota-se o seguinte critério:

- a) Quando no cálculo o espaçamento obtido for inferior a 17 cm, usa-se este espaçamento calculado com ferro alternado.
- b) Quando no cálculo o espaçamento estiver entre 17 e 20 cm, usa-se o espaçamento de 17 cm com ferro alternado.
- c) Quando o cálculo indicar espaçamento superior a 20 cm, usa-se esse espaçamento constante em toda a laje (ferro não alternado), mantendo-se os limites: 20 cm na direção principal e 34 cm na direção secundária

Quanto aos ferros negativos das lajes armadas em cruz, a norma não prescreve limite para o espaçamento. Para a armadura negativa é comum usar-se espaçamento entre 15 e 30 cm.

3.5 - Quantidade dos ferros

Calculados os espaçamentos dos ferros e seu comprimento, é preciso colocar no desenho a quantidade de ferro em cada posição. Para isso, divide-se o vão na direção normal dos ferros pelo espaçamento destes, aproximando-se o resultado.

Para o caso da figura do item 3.2, por exemplo, tem-se as quantidades de ferro:

Ferro n.°
$$1 = \frac{400}{15} = 27$$

Ferro n.°
$$2 = \frac{300}{17} = 18$$

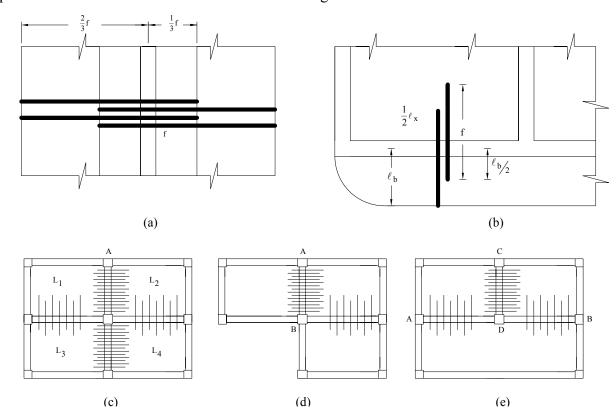
Ferro n.°
$$3 = \frac{400}{15} = 27$$

3.6 - Indicações complementares

Deve-se usar para os ferros negativos comprimentos em centímetros divisíveis por 5, como seja 75 cm, 90 cm, 105 cm, etc. A figura a seguir esclarece o posicionamento adequado para os ferros negativos em lajes contíguas e em balanço.

Sendo a armadura negativa colocada na hora da concretagem, deve-se evitar seu cruzamento, o que dificultaria a introdução da armadura no concreto fresco, e neste caso:

- 1) quando os apoios têm idêntica situação nas duas direções, figuras (c) e (d), usa-se a armadura mais forte em todo o comprimento de apoio e interrompe-se a armadura mais fraca no outro apoio;
- 2) quando o apoio em uma direção é contínuo e na outra é interrompido, figura (e), deve-se usar, em todo o comprimento correspondente, a armadura do apoio contínuo e interromper a armadura do apoio que não é contínuo; e
- 3) no caso de balanço, a armadura do balanço não deve ser interrompida, sendo preferível colocar esta armadura antes da concretagem.



3.7 - Quadro de ferros

Para elaborar o quadro de ferros em que se resume o comprimento e a quantidade de cada tipo de ferro, é comum atribuir o mesmo número apenas os ferros do mesmo diâmetro e comprimento.

O quadro geral terá o aspecto abaixo, para o caso do desenho da figura do item 3.2.

Nº	Nº a		Quantidade	Comprimento (m)		
1	φ	Qualidade	Quantidade	Unitário	Total	
1	4,6	CA-60	54	2,25	121,5	
2	3,4	CA-60	36	3,40	122,4	
3	6,4	CA-60	27	1,20	32,4	

Para efeito de encomenda dos ferros, elabora-se um quadro resumido em que se apresenta o comprimento e o peso para cada diâmetro de ferro, usando-se a Tabela 12, que dá o peso por metro para cada diâmetro. Na falta desta tabela, pode-se multiplicar a área de ferro em centímetros quadrados por 0,78 para se obter o peso em kg por metro, em números aproximados.

Para o caso da figura do item 3.2, o quadro resumido dos ferros será apresentado a seguir.

φ	Comprimento (m)	Peso (kg)
3,4	122,4	8,7
4,6	121,5	15,8
6,4	32,4	8,1
	Total	32,60

A este resultado deve ser colocado um acréscimo para prever estragos e sobras de pontas pequenas. Este acréscimo varia de 2 a 10%, conforme o tipo de obra.

Convenções para distinguir os tipos de ferro empregados.

Quando se usa em um mesmo desenho vários tipos de ferro, convém deixar bem claro no desenho o tipo de ferro previsto.

Aconselha-se as seguintes convenções:

- $\boldsymbol{\phi}\,$ indicação genérica de qualquer ferro.
- $\boldsymbol{\Phi}\;$ ferro especial.
- ø arame duro.

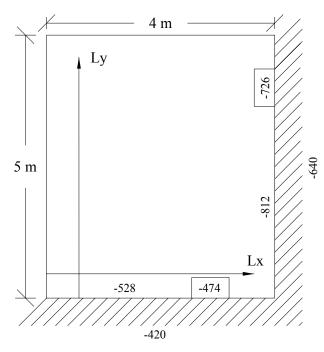
TABELA 12 Número de barras de ferro em função da seção de ferros e seus diâmetros

		Peso		Seção de ferros em cm ²												
Diâmetro	Diâmetro	por														
em	em	metro	1	2	3	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
polegada	milímetro	linear	1	2	3	7	3	0	,	0	9	10	11	12	13	17
		kg														
-	3,4	0,071	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,64	0,73	0,82	0,91	1,00	1,09	1,18	1,27
-	4,2	0,108	0,14	0,28	0,42	0,55	0,69	0,83	0,97	1,11	1,25	1,39	1,52	1,66	1,80	1,94
-	4,6	0,130	0,17	0,33	0,49	0,66	0,83	1,00	1,16	1,33	1,49	1,66	1,83	1,99	2,16	2,33
3/16	4,76	0,141	0,18	0,36	0,53	0,71	0,89	1,07	1,25	1,43	1,60	1,78	1,96	2,14	2,32	2,50
1/4	6,35	0,250	0,32	0,64	0,95	1,27	1,58	1,90	2,22	2,54	2,86	3,18	3,50	3,82	4,14	4,46
5/16	7,94	0,383	0,49	0,98	1,47	1,96	2,47	2,96	3,45	3,94	4,43	4,92	5,41	5,90	6,39	6,88
3/8	9,52	0,563	0,71	1,43	2,14	2,85	3,56	4,27	4,98	5,70	6,41	7,12	7,83	8,54	9,25	9,96
1/2	12,70	0,985	1,27	2,53	3,80	5,07	6,33	7,60	8,87	10,14	11,41	12,68	13,95	15,22	16,49	17,76
5/8	15,87	1,548	1,98	3,96	5,94	7,92	9,90	11,88	13,85	15,83	17,81	19,79	21,77	23,75	25,73	27,72
3/4	19,05	2,220	2,85	5,70	8,55	11,40	14,25	17,10	19,95	22,80	25,65	28,50	31,35	34,20	37,05	39,90
7/8	22,22	3,040	3,88	7,76	11,64	15,51	19,40	23,28	27,15	31,03	34,91	38,78	42,67	46,55	50,43	54,30
1	25,40	3,920	5,07	10,13	15,20	20,26	25,34	30,40	35,17	40,54	45,61	50,68	55,75	60,82	65,89	70,95
11/8	28,57	4,995	6,41	12,82	19,24	25,65	32,07	38,48	44,89	51,30	57,71	64,12	70,53	76,94	83,35	89,76
11/4	31,75	6,170	7,92	15,83	23,75	31,67	39,59	47,50	55,42	63,34	71,26	79,18	87,10	95,02	102,94	110,86

TABELA 13 Seção de ferros por metro de lajes

e	3/16"	1/4"	5/16"	3/8"	3,4mm	4,2mm	4,6mm
5,0	3,56	6,34	9,90	14,24	1,82	2,77	3,32
6,0	2,97	5,28	8,25	11,87	1,51	2,31	2,77
7,0	2,54	4,53	7,07	10,18	1,30	1,98	2,37
8,0	2,22	3,96	6,19	8,91	1,13	1,73	2,08
9,0	1,98	3,52	5,50	7,92	1,01	1,54	1,85
10,0	1,78	3,17	4,95	7,12	0,91	1,39	1,66
11,0	1,62	2,88	4,50	6,47	0,83	1,26	1,51
12,0	1,48	2,64	4,13	5,93	0,76	1,15	1,38
13,0	1,37	2,44	3,81	5,48	0,70	1,07	1,28
14,0	1,27	2,26	3,54	5,09	0,65	0,99	1,19
15,0	1,19	2,11	3,30	4,75	0,61	0,92	1,11
16,0	1,11	1,98	3,09	4,45	0,57	0,87	1,04
17,0	1,05	1,86	2,91	4,19	0,53	0,81	0,98
18,0	0,99	1,76	2,75	3,96	0,50	0,77	0,92
19,0	0,94	1,67	2,61	3,75	0,48	0,73	0,87
20,0	0,89	1,58	2,48	3,56	0,45	0,69	0,83
22,0	0,81	1,44	2,25	3,24	0,41	0,63	0,76
24,0	0,74	1,32	2,06	2,97	0,38	0,58	0,69
26,0	0,68	1,22	1,90	2,74	0,35	0,53	0,64
28,0	0,64	1,13	1,77	2,54	0,32	0,49	0,59
30,0	0,59	1,06	1,65	2,38	0,30	0,46	0,55
32,0	0,56	0,99	1,55	2,23	0,28	0,43	0,52
34,0	0,52	0,93	1,46	2,10	0,27	0,41	0,49

 $\textbf{Exercício} \colon \text{Calcular a laje de } 4\text{mx5 m, para acesso público, com 8 cm de espessura,} \\ \text{Aço CA-50B e concreto } f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2.$



$$R = \frac{\text{vão maior}}{\text{vão menor}} = \frac{5}{4} = 1,25 < 2 \text{ trata - se de laje armada em duas direções}$$

Cálculo das cargas:

sobrecarga
$$300 \text{ kg/m}^2$$

$$p = 550 \text{ kg/m}^2$$

Vãos teóricos:
$$\ell_{v} = 5,00 + 0,10 = 5,10$$

$$\ell_{\rm x} = 4,00 + 0,10 = 4,10$$

$$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x} = \frac{5,10}{4,10} = 1,24$$
, com este valor entra-se na tabela de Marcus, caso 3

$$m_x = 25,75$$
 $nx = 11,38$

$$m_v = 39,59$$
 ny = 17,50

Cálculo dos momentos positivos (nos vãos):

$$M_x = \frac{p \cdot \ell_x^2}{m_x} = \frac{550 \cdot 4,10^2}{25,75} = 359 \text{ kgm}$$

$$M_y = \frac{p \cdot \ell_x^2}{m_y} = \frac{550 \cdot 4,10^2}{39,59} = 233,51 \text{kgm}$$

Momentos negativos(nos apoios):

$$X_x = -\frac{p \cdot \ell_x^2}{n_x} = \frac{550 \cdot 4,10^2}{11,38} = 812 \text{ kgm}$$

$$X_y = -\frac{p \cdot \ell_x^2}{n_y} = \frac{550 \cdot 4,10^2}{17,50} = 528 \text{ kgm}$$

Verificação da altura:

$$M = \mu d^2 f_{cd}$$
 - Tabela 3 $\mu = 0.256 (CA 50B)$

$$M = 0.256 \cdot 7^2 \cdot 150/1.4 = 1342 \text{ kgm}$$

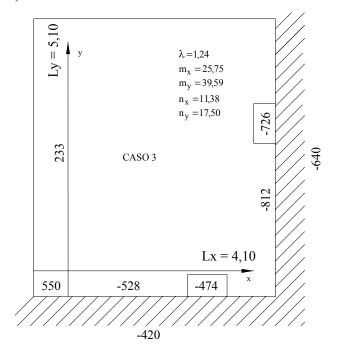
Maior momento calculado = 812~kgm, sendo que Md = 812~.~1,4 = 1137~kgm, então h = 8~cm está bem.

Cálculo do As para a direção x: (Tabela 3, CA 50B)

$$A_{sx} = \frac{Md}{\alpha d} = \frac{359 \cdot 1,4}{35,44 \cdot 7} = 2,03 \text{ cm}^2$$

Cálculo do As para a direção y:

$$A_{sx} = \frac{Md}{\alpha d} = \frac{233,51 \cdot 1,4}{35,44 \cdot 7} = 1,32 \,\text{cm}^2$$



Cálculo da ferragem negativa (nos apoios):

$$X_x = \frac{812 + 640}{2} = -726 \text{ kgm} \text{ ou } X_x = 0.8 \cdot (-812) = -649.6 \text{ kgm, o maior dos dois}$$

Cálculo do A_s na direção X_x:

$$A_s X_x = \frac{Md}{\alpha d} = \frac{726 \cdot 1,4}{35,44 \cdot 7} = 4,1 \text{ cm}^2$$

Cálculo do As na direção X_y:

$$X_x = \frac{528 + 420}{2} = -474 \text{ kgm} \text{ ou } X_x = 0.8 \cdot (-528) = -422.4 \text{ kgm, o maior dos dois}$$

$$A_s X_y = \frac{Md}{\alpha d} = \frac{474 \cdot 1.4}{35.44 \cdot 7} = 2.7 \text{ cm}^2$$

Resumo

Áreas de ferragem	Tabela12	Distância de ferro a ferro
(cm ²)	(por metro linear)	(espaçamento, cm)
$A_{sx} = 2,03$	12 φ 3/16"	8 cm
$A_{sy} = 1,32$	8 φ 3/16"	12 cm
$A_{s}X_{x} = 4,10$	9 φ 5/16"	11 cm
$A_{s}X_{y} = 2,70$	6 φ 5/16"	16 cm

Comprimento dos ferros: vão extremo para ambas direções

- Direção de $X = 4,10 \cdot 0,75 = 3,07 \text{ m}$

- Direção de $y = 5,10 \cdot 0,75 = 3,82 \text{ m}$

Ferros negativos:

$$\frac{4,10}{4}$$
 · 1,50 = 1,53 m

Nº de ferros:

- Direção de X: 510/8 = 64 ferros . 3,07 = 196,48 m

- Direção de Y: 410/12 = 34 ferros .3,82 = 129,88 m

- Direção A_sX_x : 510/11 = 46 . 1,53 = 70,38 m

- Direção $A_s X_v$: $410/16 = 26 \cdot 1,53 = 39,78 \text{ m}$

Outras informações:

ferro
$$3/16$$
" = $196,48 + 129,88 = 326,36$ m . $0,141$ kg/m = $46,02$ kg ferro $5/16$ " = $70,38 + 39,78 = 110,16$ m . $0,383$ kg/m = $42,19$ kg Total = $88,21$ kg

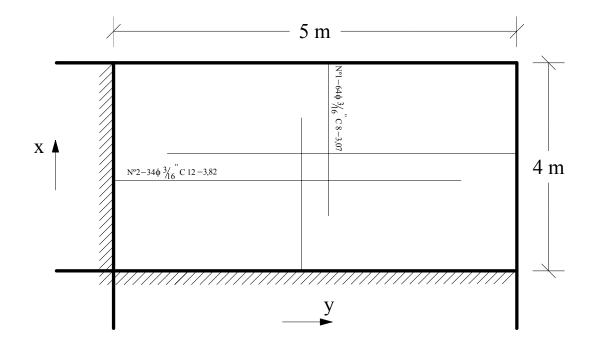
Área da laje = $5.4 = 20 \text{ m}^2$, ou seja $88,21/20 = 3,70 \text{ kg/m}^2$

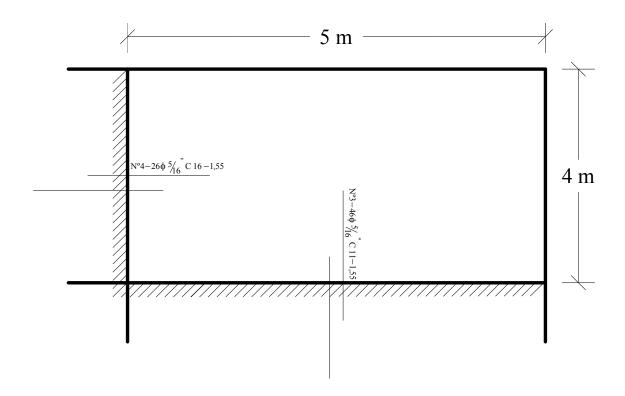
Quadro de ferros

Nº	(0)	Oualidada	Quantidada	Comprimento (m)			
11	φ	Qualidade	Quantidade	Unitário	Total		
1	3/16	CA-50 B	64	3,07	196,48		
2	3/16	CA-50 B	34	3,82	129,88		
3	5/16	CA-50 B	46	1,53	70,38		
4	5/16	CA-50 B	26	1,53	39,78		

Resumo da quantidade de ferros

φ	Comprimento (m)	Peso (kg)
3/16	326,36	46,02
5/16	110,16	42,19
	Total	88,21+10% = 97,03





4 - Dimensionamento e detalhes das vigas de edifícios

4.1 - Cálculo das Cargas nas Vigas

Generalidades

As principais cargas que se distribuem sobre as vigas, determinadas por metro linear, compõem-se das cargas transmitidas pelas lajes, cargas de paredes e peso próprio. Além destas, pode haver ocorrência de cargas concentradas provenientes da ação de outras vigas ou pilares.

Cargas transmitidas pelas lajes

Pelo processo dos quinhões de carga, supõem-se as lajes isoladas sob a ação dos quinhões de carga em cada direção e calculam-se as reações como se as faixas fossem peças isoladas e independentes.

Exemplo: A carga transmitida pela laje L1 às vigas AB e CD da figura abaixo, será: $0.5.q_x$. Esta carga é uniformemente distribuída e seu valor é dado por metro linear de viga.

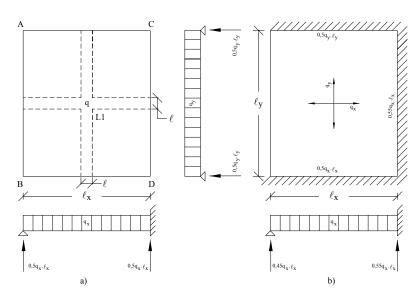
Do mesmo modo, a laje L1 transmite às vigas AC e BD uma carga uniformemente distribuída por metro linear igual a 0.5. q_y . ℓ_y .

No caso de haver engastamento em um dos lados e apoio no lado oposto, a carga é maior no lado engastado. Aproximadamente, podemos considerar que a carga total sobre a faixa se distribui da seguinte maneira: 0,55 para o lado do engaste e 0,45 para o lado do apoio.

No caso de engaste em dois lados opostos a carga se distribui como no caso de dois apoios. As fórmulas gerais para a carga nas vigas podem ser escritas como se segue:

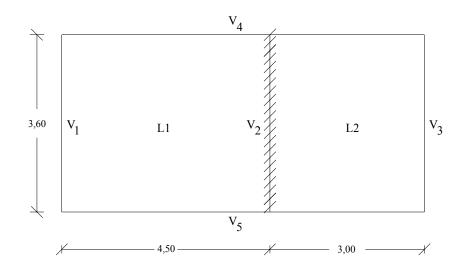
$$\mathbf{R}_{\,\mathbf{x}} = \mathbf{c}_{\,\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}_{\,\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\ell}_{\,\mathbf{x}} \qquad \qquad \mathbf{R}_{\,\mathbf{y}} = \mathbf{c}_{\,\mathbf{y}} \cdot \mathbf{q}_{\,\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\ell}_{\,\mathbf{y}}$$

onde os coeficientes cx e cy têm os valores: 0,5 para 2 apoios ou 2 engastes e 0,55 e 0,45 para um engaste e um apoio, respectivamente.



Exercício:

Calcular, pelo método dos quinhões, as reações nas vigas para a estrutura da figura a seguir com carga total por metro quadrado de 500 kg/m².



a) Pelo processo dos quinhões, tem-se:

Laje L1:
$$L_{x} = 4,50 \text{ m} \qquad L_{y} = 3,60 \text{ m}$$

$$\lambda = L_{y}/L_{x} = 3,60/4,50 = 0,80$$

Para laje com 1 engaste, entra-se na tabela 7 e encontra-se, para λ = 0,80, e k_x = 0,506, portanto:

$$q_x = k_x \cdot q = 0,506 \cdot 500 = 253 \text{ kg/m}^2$$

 $q_y = q - q_x = 500 - 253 = 247 \text{ kg/m}^2$

As cargas nas vigas são:

Sobre
$$V_4$$
 e V_5 : 0,5 . 247 . 3,60 = 445 kg/m
Sobre V_1 : 0,45 . 253 . 4,50 = 512 kg/m
Sobre V_2 : 0,55 . 253 . 4,50 = 626 kg/m

Laje L2:
$$L_x = 3,00 \text{ m}$$
 $L_y = 3,60 \text{ m}$ $\lambda = 3,60/3,00 = 1,2$

Na tabela 7, encontramos $k_x = 0.838$, então:

$$q_x = 0.838 .500 = 419 \text{ kg/m}^2$$

$$q_v = 500 - 419 = 81 \text{ kg/m}^2$$

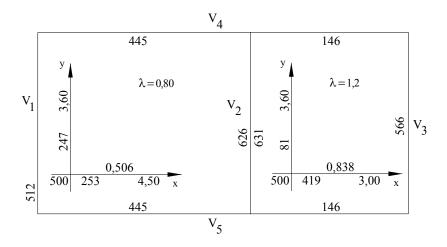
As cargas nas vigas são:

Sobre
$$V_4$$
 e V_5 : 0,5 . 81 . 3,60 = 146 kg/m

Sobre
$$V_3$$
: 0,55 · 419 · 3,00 = 691 kg/m

Sobre
$$V_3$$
: 0,45 · 419 · 3,00 = 566 kg/m

O cálculo feito em esquema numérico é apresentado na figura a seguir.



Cargas de paredes

Quando sobre uma viga existe uma parede, deve-se calcular a carga transmitida por esta sobre aquela. Essa carga é calculada por metro corrente de viga e é igual ao volume de 1 metro de parede multiplicado pelo seu peso específico.

Para o tijolo cheio usa-se o peso específico de 1.600 kg/m³ e para tijolo furado temos 1.200 kg/m³.

Peso próprio da viga

O peso próprio das vigas é calculado estimando aproximadamente sua espessura e altura, e calculando o volume por metro corrente da mesma, que, multiplicado pelo peso específico do concreto armado (2.500 kg/m³), dá o peso por metro corrente.

Não é preciso calcular o peso exato porque sua influência é pequena e na prática suas dimensões podem ser:

espessura =
$$1/30$$
 do vão e altura = $1/10$ do vão

Roteiro numérico para o cálculo das cargas sobre as vigas.

O cálculo das cargas sobre as vigas pode ser feito diretamente sobre a planta esquemática da estrutura, como se fez no cálculo dos momentos das lajes.

Para isto, usam-se os esquemas da figura anterior para o cálculo das cargas das lajes e acrescentam-se as cargas do peso da viga e da parede, como mostra a figura a seguir. O esquema contempla a parte referente à viga (60 kg/m), o peso de uma parede de 15 cm de espessura com pé direito de 3 m e a carga por metro quadrado de 180 kg/m^2 . O peso por metro desta parede é de $180 \cdot 3 = 540 \text{ kg/m}$.

As parcelas da carga sobre as vigas são identificadas com as letras L, V e P, colocadas em seguida ao seu valor numérico, e que significam lajes, vigas e paredes, respectivamente.

A soma das parcelas devidas às lajes, vigas e paredes dará a carga total por metro que atua no trecho da viga correspondente. Esta carga é, assim, suposta uniformemente distribuída.

4.2 - Determinação da altura.

Muitas vezes, a escolha das alturas das vigas de edifícios é feita com a simples observação da situação das vigas, atendendo à experiência do projetista, procedendo-se posteriormente à verificação destas alturas.

As alturas das vigas de edifícios se situam geralmente em torno de 1/10 do vão da viga.

Pode-se partir da fórmula:

$$d = r \sqrt{\frac{1, 4 \cdot X_{m\acute{a}x}}{b_w}}$$

onde: $X_{\text{máx}}$ é o maior momento fletor negativo em valor absoluto, bw a espessura da viga e r é o coeficiente da tabela 3.

Na prática, muitas vezes, prefere-se adotar alturas superiores à obtida com a fórmula anterior para reduzir o consumo da armadura.

Para economizar as despesas com a confecção das formas, deve-se usar para altura das vigas, valores que sejam múltiplos de 5 cm e não inferiores a 20 cm. A esta altura acrescenta-se a espessura da laje. Assim, para laje de 8 cm de espessura, as alturas práticas em cm das vigas são 28, 33, 38, 43, 48, etc.

Nas vigas invertidas, usa-se, na fórmula anterior, o valor do maior momento positivo em vez de $X_{\text{máx}}$.

A altura fixada pela fórmula anterior deve ser verificada ao cisalhamento, usando-se a fórmula:

$$d = \frac{V_{m\acute{a}x}}{b_w \cdot \tau_{wu}}$$

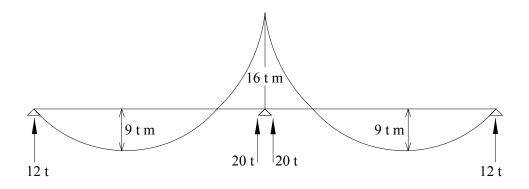
onde: $V_{\text{máx}}$ é a maior das forças cortantes, b_w a espessura da viga e τ_{wu} é o limite imposto pela norma.

Exercício:

Fixar a altura para a viga da figura a seguir, atendendo aos diagramas de momento fletores e forças cortantes indicados na mesma. Adota-se $f_{ck} = 140 \text{ kg/cm}^2$ e aço CA-50B.

Solução X_{max} = 16 tm, adotando b_w = 20 cm e usando o coeficiente da tabela 3 para f_{ck} = 140 kg/cm² e aço CA-50B, tem-se:

$$d = 0.198 \sqrt{\frac{1.4 \cdot 16000}{0.20}} = 66.2 \text{cm}$$



Quanto ao cisalhamento, tem-se:

$$\tau_{\text{wu}} = 0.25 \cdot \frac{140}{1.4} = 25 \,\text{kg/cm}^2$$

$$d = \frac{20000 \cdot 1.4}{20 \cdot 25} = 56 \,\mathrm{kg/cm^2}$$

A altura prática a usar será h = 68 cm com 60 cm de nervura e 8 cm de laje.

4.3 - Cálculo das seções de ferro

As fórmulas teóricas, para uma seção retangular, são:

$$A_s = \frac{Md}{\alpha \cdot d}$$

onde α é tirado da tabela 4, entrando-se com o valor de r dado pela fórmula:

$$r = \frac{d}{\sqrt{\frac{Md}{b}}}$$

onde $b = b_w$ ou $b = b_f$, conforme a mesa seja tracionada ou comprimida.

4.4 - Regras de distribuição das armaduras de flexão e cisalhamento.

Estribos verticais

Os critérios de dimensionamento e detalhes das armações transversais em estribos serão examinados a seguir.

As barras da armadura principal inferior, quando interrompidas, podem ser ancoradas na sua própria direção - com estribos pouco espaçados, o concreto se acha sob compressão transversal. Recomenda-se o pormenor da figura a seguir. A armadura deve ser distribuída de modo a permitir uma boa concretagem, ou seja, o envolvimento das barras da armadura por concreto bem adensado. Para isso, a distribuição da armadura deve permitir a passagem dos agregados e o acesso da agulha do vibrador.

As barras ancoradas na parte superior e sobre a alma da viga estão em zona desfavorável de aderência, precisando de um comprimento de ancoragem 50% maior que o normal.

As barras superiores colocadas fora da alma da viga, ou seja, distribuídas na laje (h<30 cm), podem ser ancoradas com o comprimento normal, pois nessa região existe boa aderência entre o concreto e o ferro.

Nas vigas não muito altas, podem evitar-se os grandes comprimentos de ancoragem das barras superiores, dobrando e aproveitando as mesmas como armadura inferior.

Para evitar tensões elevadas de aderência no apoio extremo, onde deve ancorar um esforço da ordem de grandeza da reação de apoio, convém prolongar 1/3 da armadura principal do meio do vão até o apoio extremo. Pelo menos 25% da armadura principal deve igualmente ser levada até o apoio intermediário de uma viga contínua, aumentando-se esse percentual para 33% quando o momento negativo no apoio for menor que a metade do momento positivo no vão.

A armadura principal deve cobrir efetivamente um diagrama M/z descalado horizontalmente de uma distância aproximadamente igual à altura útil da viga, quando se empregam as teorias modernas para dimensionar a armadura transversal.

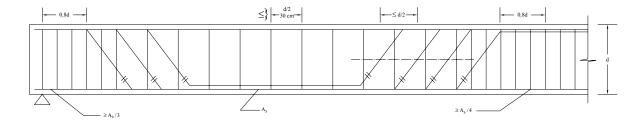
Estribos inclinados

A armação com estribos finos e inclinados (45° a 60°) reduz a fissuração das vigas, sendo possível nesse caso atingir valores elevados de τ_{od} (tensão média convencional de cisalhamento no estado-limite de projeto). O descalamento necessário do diagrama de momentos é menor que no caso de estribos verticais, resultando armadura principal mais curta.

Nos apoios extremos, os estribos inclinados devem ter altura variável para cobrir a viga até junto do ponto de apoio. Nos apoios intermediários, os estribos dos vãos adjacentes se cruzam sobre o apoio.

Estribos verticais e barras inclinadas

Nos trechos próximos do apoio, até 0,8d, é preferível usar apenas estribos com pequeno espaçamento, sem barras dobradas.



Nos trechos da viga onde atuam estribos e barras dobradas, pelo menos 40% dos esforços devem ser absorvidos pelos estribos.

A distância horizontal longitudinal entre barras inclinadas deve ser no máximo igual à metade da altura da viga, para fornecer um controle eficaz de fissuração.

De preferência, dobrar de cada vez um par de barras, simétricas em relação ao plano médio da alma.

Uma parte da armadura principal do meio do tramo deve ser prolongada até os apoios, recomendando-se 1/3 para o apoio extremo e 1/4 para apoios intermediários de vigas contínuas (aumentar para 1/3 quando o momento negativo no apoio for menor que a metade do maior momento positivo no vão).

4.5 - Prescrições regulamentares

As prescrições que se seguem se referem mais especificamente às armaduras longitudinais:

a) Porcentagem mínima da armadura longitudinal

O estudo da porcentagem mínima da armadura longitudinal é feito com base na fórmula que dá a taxa mínima da armadura:

$$\rho_{\min} = 0.043 \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$$

Esta fórmula está de acordo com os princípios estabelecidos na norma brasileira e no CEB. Contudo, estas normas citam os seguintes valores para ρ_{min} :

NBR	Para aço comum	0,25%
TVDIC	Para aço especial	0,15%
CEB	Nas lajes	0,10%
CLB	Nas outras formas de seção	0,15%

b) Diâmetro das armaduras longitudinais

Se algumas das armaduras longitudinais forem levantadas para combate ao cisalhamento, usar diâmetros que não ultrapassem 1/8 da largura bw da nervura.

c) Espaçamento das armaduras

Segundo a norma, o espaçamento entre as armaduras longitudinais não deve ser inferior a 2 cm nem a uma vez o maior diâmetro da armadura.

Se forem usadas armaduras em forma de feixe, aplicar as mesmas prescrições supondo o feixe substituído por uma barra fictícia de mesmo centro e de área igual à soma das áreas das barras do feixe.

Deve-se, além disso, deixar entre as barras espaços iguais a 1,5 vezes o calibre máximo do agregado na direção horizontal e 0,5 vezes este calibre na direção vertical.

d) Cobrimento das armaduras

A distância entre qualquer armadura e face da peça deve ser no mínimo igual a:

Peças interiores protegidas:

1 cm, φ, a

Peças interiores não protegidas, ou exteriores:

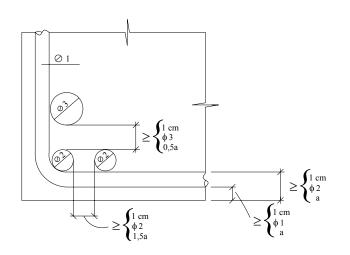
 $2 \text{ cm}, 1, 2 \text{ } \phi, 1$

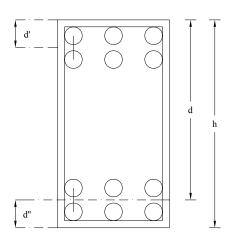
Peças exteriores sujeitas a grandes intempéries:

 $3 \text{ cm}, 1,25 \text{ } \phi, 1,5 \text{ } a$

onde ϕ é o diâmetro da armadura a que corresponde a distância fixada e a é o calibre máximo do agregado.

As figuras a seguir esclarecem o problema do espaçamento mínimo das armaduras longitudinais, no caso particular de peças interiores.





Segundo a norma, as espessuras mínimas de cobrimento das ferragens são:

a) para concreto revestido com argamassa de espessura mínima de 1 cm:

- em lajes no interior de edifícios	0,5 cm
- em paredes no interior de edifícios	1,0 cm
- em lajes e paredes ao ar livre	1,5 cm
- em vigas, pilares e arcos no interior de edifícios	1,5 cm
- em vigas, pilares e arcos ao ar livre	2,0 cm

b) para concreto aparente:

- no interior de edifícios	2,0 cm
- ao ar livre	2,5 cm

c) para concreto em contato com o solo

3.0 cm

- se o solo não for rochoso, sob a estrutura deverá ser interposta uma camada de concreto simples, não considerada no cálculo, com consumo mínimo de cimento de 250 kg/m³ e espessura de pelo menos 5 cm.

d) para concreto em meio fortemente agressivo

4.0 cm

- para cobrimento maior que 6,0 cm, deve colocar uma armadura de pele complementar, em rede, cujo cobrimento não deve ser inferior aos limites especificados, de a até d.

Nos casos comuns, na prática, pode-se adotar para efeito de projeto os seguintes valores das distância d' e d" em cm, que vão do centro das armaduras à face do concreto, como indica a figura anterior:

Tipo de obra	N.º de camadas	d'	ď"
	1	2,5	2
No interior	2	4,5	4
	3	6,0	5
	1	3,5	3
No exterior	2	5,5	5
	3	7,0	6

Armadura na região dos apoios das vigas

De acordo com a norma, deve-se prolongar até o apoio uma parcela da armadura de tração, calculada para o vão, igual a 1/3 desta armadura, quando se trata de apoio simples, ou dotado de momento inferior a 1/2 do momento positivo. Quando o momento no apoio supera o valor acima, basta prolongar até o apoio 1/4 da armadura calculada para o vão.

Número de camadas

O número de camadas das armaduras de tração é regulado pela prescrição da norma, que estabelece: os esforços nas armaduras só podem ser considerados como concentrados no centro de gravidade das armaduras quando a distância do centro ao ponto mais afastado da armadura for inferior a 5% de h.

Diâmetro dos estribos

As recomendações do CEB e a norma NBR fixam como valor máximo para o diâmetro dos estribos 1/8 da largura da alma. O diâmetro dos estribos não deve ser superior a 1/12 da espessura da viga nem inferior a 5 mm.

4.6 - Uso de Tabelas para Cálculo de Vigas

- 1 Livro de Francisco Xavier Adão Cálculo Prático e Econômico de Concreto Armado. Editora Interciência.
- 2 Promon Tabelas para Dimensionamento de Concreto Armado Editora McGraw-Hill do Brasil.

TABELA 14
Armação de vigas retangulares à flexão normal simples

 $\label{eq:momentos} \begin{array}{ll} \mbox{Momentos em tf cm, alturas h em cm, Seção A_S em cm2.} & \mbox{Seções normalmente armadas (limite) - Estado limite último } \\ \mbox{$f_{\mbox{ck}} > 180$ kg/cm2 e $Aço CA-50A/B} & \mbox{$b > 10$ cm para $h > 100} & \mbox{$b > 15$ cm para $h > 120} \\ \end{array}$

Ferragem	A _s h	20	30	40	50	60	70	75	80	100	120	140	150
2 ø 5	0,40	20	33	45	57	-	-	-	-	-	-	-	-
2 ø 6.3	0,63	31	50	70	89	109	-	-	-	-	-	-	-
2 ø 8	1,00	47	78	109	140	171	201	218	232	-	-	-	-
4 ø 6.3	1,26	57	96	135	174	214	252	272	291	-	-	-	-
2 ø 10	1,60	69	118	168	219	267	317	344	368	466	571	-	-
4 ø 8	2,00	81	143	205	266	329	393	422	452	579	709	-	-
2 ø 12 ⁵	2,50	98	171	248	327	404	463	519	560	711	881	1038	-
6 ø 8	3,00	118	195	290	382	476	569	617	668	846	1051	1238	-
4 ø 10	3,20	125	204	305	403	502	602	653	704	901	1118	1317	1419
5 ø 10	4,00	157	249	360	486	611	738	793	865	1109	1389	1636	1760
6 ø 10	4,80	188	299	409	561	707	862	937	1010	1308	1652	1951	2097
4 ø 12 ⁵	5,00	196	311	426	577	729	882	965	1043	1351	1716	2027	2178
3 ø 16	6,00	235	373	512	650	875	1028	1128	1216	1590	2041	2411	2594
5 ø 12 ⁵	6,25	245	389	533	677	985	1060	1151	1257	1643	2107	2497	2694
6 ø 12 ⁵	7,50	294	467	639	812	1051	1206	1327	1447	1914	2507	2961	3205
4 ø 16	8,00	313	498	682	866	1241	1279	1388	1514	2010	2652	3131	3389
3 ø 20	9,45	370	588	806	1024	1313	1459	1568	1716	2297	3080	3647	3947
8 ø 12 ⁵	10,00	392	622	853	1083	1478	1544	1659	1774	2383	3223	3848	4164
9 ø 12 ⁵	11,25	-	700	959	1218	1576	1737	1866	1996	2604	3567	4246	4607
6 ø 16	12,00	-	746	1023	1300	1642	1853	1990	2129	2745	3764	4504	4886
10 ø 12 ⁵	12,50	-	778	1066	1354	1650	1914	2074	2218	2794	3890	4679	5063
7 ø 16	14,00	-	871	1194	1526	1848	2156	2324	2484	3129	4522	5142	5577

5 - Pilares de Concreto Armado

De acordo com a norma, a dimensão mínima dos lados da seção de pilares deve ser 20 cm ou 1/25 da altura livre, adotando-se o maior valor.

Os limites acima poderão ser reduzidos, desde que se aumente o coeficiente de segurança das solicitações de 1,4 para 1,8 e a seção transversal, composta de retângulos (cantoneira, zê, tê, duplo tê), cada um dos quais com largura não inferior a 10 cm ou 1/15 do respectivo comprimento, desde que o raio de giração da seção composta seja igual ou maior que o de uma seção quadrada 20 cm x 20 cm (i > 6cm).

Os pilares com seção transversal muito alongada (h > 5b) devem ser tratados como estruturas laminares, sob a denominação de paredes estruturais.

A percentagem da armadura longitudinal dos pilares não cintados é variável, contudo, a fixação de um mínimo é necessária para proteger o pilar contra inevitáveis excentricidades de carga, sendo que as barras devem ser posicionadas na periferia do pilar, respeitando o recobrimento mínimo.

As barras grossas fazem uma armação mais rígida, exigindo também menos estribos. Em geral, adota-se um diâmetro igual ou superior a 1/2". O espaçamento mínimo entre as barras longitudinais deve ser igual ao diâmetro da barra ou 1,2 vezes o maior tamanho do agregado ou 2,0 cm.

Segundo a norma, o espaçamento máximo entre as barras longitudinais no contorno é de 40 cm

Estribos

Os estribos têm a função de impedir a flambagem prematura das barras longitudinais. Em geral são de diâmetro aproximadamente igual a 1/4 do maior diâmetro da armadura longitudinal, porém não menos que 1/4".

O espaçamento entre os estribos não deve ser maior que qualquer dos valores seguintes:

a - 12 ø1 - barras longitudinais em aço CA-50

b - 190 $\varnothing^2_t/\varnothing_{\ell}$ para CA-50.

c - 30 cm

d - Menor dimensão do pilar

A condição (a) visa impedir a flambagem da armadura longitudinal. Se esta for constituída de barras com diâmetro de 1", o espaçamento máximo corresponde à condição (a) valerá:

$$12 \cdot \emptyset_{\ell} = 12 \cdot 2,54 = 30 \text{ cm}$$

A condição (b) visa a relacionar o espaçamento com o diâmetro do estribo (\emptyset t) e com a relação $\emptyset_t/\emptyset_\ell$. Adotando-se $\emptyset_t/\emptyset_\ell=1/4$ e supondo $\emptyset_t=1/4$ ", chegamos aos espaçamentos:

- 190
$$o^2$$
t/ o_{ℓ} = 190 . 0,64 . 0,25 = 30 cm,

As condições (c), (d) são valores absolutos recomendados pela prática.

Como exemplo, considerando uma coluna 30 cm x 30 cm, armada com ferros longitudinais de 7/8", CA-50 e estribos 1/4", o espaçamento dos estribos correspondes a cada uma das condições acima, vale:

$$a - 12 \cdot 2,22 = 27 \text{ cm}$$

$$b - 190 \cdot 0.64^2 / 2.22 = 35 \text{ cm}$$

c - 30 cm

d - 30 cm

Vê-se que a condição de flambagem da armadura longitudinal é determinante do espaçamento dos estribos, neste exemplo.

Os estribos devem ser dobrados sem folga em torno das barras longitudinais, para garantir o suporte lateral destas (ver Figura a seguir). Quando as barras se acham localizadas na periferia de um círculo, podem-se usar apenas estribos circulares envolvendo a armadura.

Armadura longitudinal mínima de pilares com estribos

A porcentagem geométrica da armadura longitudinal dos pilares fica compreendida entre 6% e 0.8% da seção de concreto, reduzindo-se o limite inferior para 0.5% quando a esbeltez da peça for inferior a 30. Muitas vezes acontece que a seção transversal do pilar tem dimensões maiores que a mínima exigida pelo cálculo, referindo-se então as porcentagens mínimas a seção de concreto teoricamente necessária $A_{c,cal}$. A seção estritamente necessária para equilibrar a solicitação normal é dada por:

$$A_{c,cal} = \frac{N_d}{f_c} = \frac{\gamma_f \cdot \gamma_c}{0.85} \cdot \frac{N}{f_{ck}}$$

Deverá ser ainda respeitado o valor mínimo 0,5% A_c.

Com os coeficientes de segurança da norma (γ_f =1,4 e γ_c =1,4), e supondo um concreto f_{ck} = 180 kgf/cm², obten-se os seguintes valores aproximados (para λ = L/i):

$\lambda < 30$

$$A_{s\ell \, min} = 0.5\% A_{c, cal} \approx \frac{N_{(tf)}}{15} \ge 0.5\% A_{c}$$

$\lambda > 30$

$$A_{s\ell \, min} = 0.8\% A_{c, cal} \approx \frac{N_{(tf)}}{10} \ge 0.5\% A_{c}$$

Como exemplo, vamos calcular a armadura longitudinal mínima de um pilar longo (λ >30), sujeito a uma carga normal em serviço N=240 tf, sendo o concreto f_{ck} = 220 kgf/cm². O cálculo aproximado com a fórmula acima é:

$$A_{s\ell min} = \frac{N_{(tf)}}{10} = \frac{240}{10} = 24 \text{ cm}^2$$

O cálculo mais preciso, com a área necessária de concreto é:

$$A_{c,cal} = \frac{\gamma_f \cdot \gamma_c}{0.85} \cdot \frac{N}{f_{ck}} = \frac{1.4 \cdot 1.4}{0.85} \cdot \frac{240}{0.22} = 2516 \text{ cm}^2$$

$$A_{s\ell min} = 0.8\% A_{c,cal} = 0.8\% \cdot 2516 = 20.1 \text{ cm}^2 \ge 0.5\% A_c$$

O valor mínimo calculado acima não deve ser inferior a 0,5% da área da seção real da coluna.

Na figura a seguir pode-se observar várias formas de estribos, de acordo com a seção dos respectivos pilares.

A tabela, após a figura, apresenta a seção do pilar de concreto armado, a ferragem longitudinal requerida e o comprimento máximo de flambagem em função da carga admissível em toneladas.

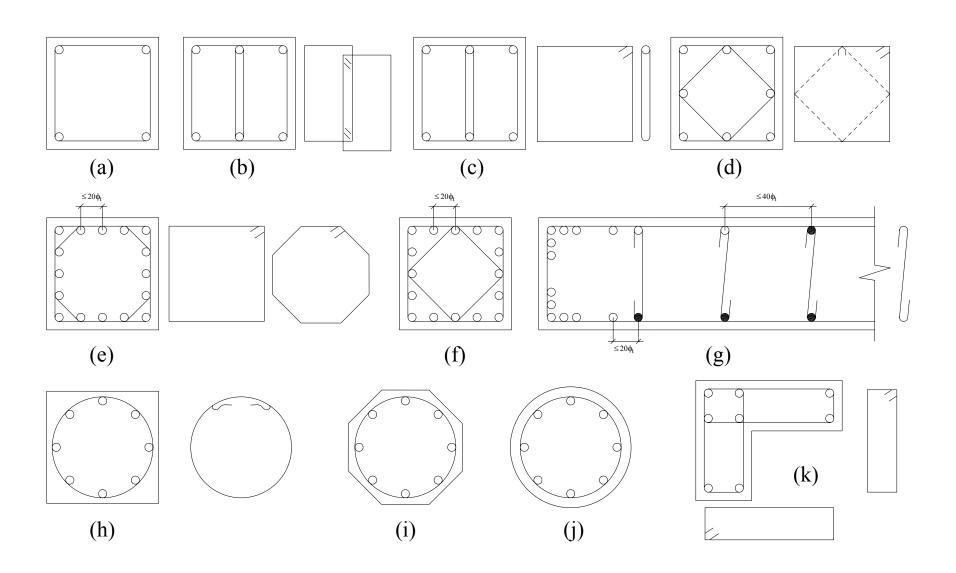


TABELA 15 Pilares retangulares sujeitos à compressão axial

Cálculo simplificado (Estado Limite último) Cargas (N) em t , número de ferros e diâmetro (ø) em milímetros, altura máxima de flambagem em cm (L), e dimensões da seção do pilar em cm.

 $f_{ck} \ge 180 \text{ kg/cm}^2$ Aço CA-50-B/A

Dimensões da seção	15	20	25	30	35	40	45	50
do pilar (cm)	L=225	L=300	L=375	L=450	L=525	L=600	L=675	L=750
20	20t	24t	34t					
	4 ø 10	4 ø 10	4 ø 12 ⁵					
30	30t	36t	51t	60t				
	6 ø 10	6 ø 10	6 ø 12 ⁵	6 ø 12 ⁵				
40	40t	48t	68t	80t	97t	115t	136t	
	8 ø 10	8 ø 10	8 ø 12 ⁵	8 ø 12 ⁵	10 ø 12 ⁵	12 ø 12 ⁵	10 ø 16	
50	50t	60t	81t	100t	122t	138t	160t	176t
	10 ø 10	10 ø 10	8 ø 12 ⁵	6 ø 16	8 ø 16	8 ø 16	10 ø 16	10 ø 16
60	60t	72t	98t	122t	148t	168t	195t	213t
	12 ø 10	12 ø 10	10 ø 12 ⁵	8 ø 16	10 ø 16	10 ø 16	8 ø 20	2 ø 20

BIBLIOGRAFIA

- 1 BEER, F. P.; JOHNSTON Jr., E. R. **Mechanics of Materials**. São Paulo. Mc Graw-Hill, 1981. 616 p.
- 2 MIDWEST PLAN SERVICE. **Structures and Environment Handbook**. 11^a ed. Washington, DC, USDA, 1983.
- 3 MOLITERNO, A. Caderno de Projetos de Telhados em Estruturas de Madeira. São Paulo, Edgard Blucher, 1981. 420 p.
- 4 MOREIRA, R. Desenvolvimento e Análise de um Silo Graneleiro com Paredes de Madeira Compensada e Sistema de Contensão Lateral Metálica. Viçosa, UFV, 1990. Tese de Mestrado. 69 p.
- 5 NB-1 **Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**. São Paulo, ABNT, 1978.
- 6 NBR 6123 Forças Devidas ao Vento em Edificações. Rio de Janeiro, ABNT, 1980. 25 p.
- 7 NBR 7190 Cálculo e Execução de Estruturas de Madeira. Rio de Janeiro, ABNT, 1982. 22 p.
- 8 NBR 8800 **Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios**. Rio de Janeiro, ABNT, 1986. 200 p.
- 9 PFEIL, W. Concreto Armado. 3ª ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978. 247 p.

- 10 PFEIL, W. **Estruturas de Madeira**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1985. 296 p.
- 11 PIANCA, J. D. **Manual do Construtor. Vol. I e II**. Porto Alegre, Editora Globo, 1987. 664 e 450 p.
- 12 REIMBERT, M; REIMBERT, A. Silos Teoria y Práctica. Vol I e II. Buenos Aires, Editorial Americalee, 1979. 463 e 195p.
- 13 ROCHA, A. M. Novo Curso de Concreto Armado. Vol 1, 2, 3, 4 e 5. Rio de Janeiro, Editora Científica, 1982.
- 14 SCHREYER. Estática das Construções. Vol I e II. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1960.
 179 e 358 p.
- 15 SÜSSEKIND, J. C. Curso de Análise Estrutural. Vol. 1, 2 e 3. Rio de Janeiro, Editora Globo, 1987.